2ask

Der Internetdienst für Ihre Online-Umfragen

Leitfaden statistische Auswertung

Weitere in dieser Reihe bei 2ask erschienene Leitfäden

Allgemeiner Leitfaden zur Fragebogenerstellung

Sie möchten einen Fragebogen erstellen, doch die konkrete Umsetzung bereitet Ihnen Probleme? Eine Reihe methodischer Tipps und Tricks sowie konkrete Hinweise zur Formulierung der einzelnen Items erhalten Sie hier.


2ask
Der Internetdienst für Ihre Online-Umfragen
Leitfaden für die Erstellung eines Fragebogens

Leitfaden Mitarbeiterbefragung

Worauf sollte bei einer Mitarbeiterbefragung besonders geachtet werden? Wo liegt der Nutzen, wo liegen Gefahren? Zusätzlich beinhaltet der Leitfaden eine Reihe praktischer Tipps zur Konzeption, Durchführung und Auswertung.


2ask
Der Internetdienst für Ihre Online-Umfragen
Leitfaden für die Erstellung einer Mitarbeiterbefragung

Leitfaden Kundenbefragung

Welche Vorteile bietet eine Kundenbefragung? Wie geht man dabei am besten vor? Was kann man mit welcher Art von Fragenstellung herausfinden? Außerdem enthält der Leitfaden viele konkrete Tipps zur Erstellung des Frageinstruments, zur Durchführung und zur Auswertung.


2ask
Der Internetdienst für Ihre Online-Umfragen
Leitfaden für die Erstellung einer Kundenbefragung

Anleitung für SPSS

Nach erfolgreicher Durchführung der Umfrage liegen Ihre Rohdaten vor. Sie wissen, was Sie berechnen wollen, aber Sie wissen nicht, wie das in SPSS funktionieren soll?
Diese Anleitung bietet einen Überblick darüber wie Verfahren wie Korrelationsanalyse, Varianzanalyse oder Mittelwertsvergleiche mit SPSS durchgeführt werden.


2ask
Der Internetdienst für Ihre Online-Umfragen
Erste Schritte mit SPSS – eine Anleitung

2ask Kurzanleitung

Starten Sie Ihre Umfrage bei 2ask in nur 10 Schritten. Einfach und übersichtlich erklärt für diejenigen, die auf Nummer sicher gehen wollen.


2ask
Der Internetdienst für Ihre Online-Umfragen
2ask Kurzanleitung

1 Inhaltsverzeichnis

2 Vorwort

Mit diesem Dokument möchten wir Ihnen eine kleine pragmatische Hilfe für die Auswertung Ihrer Online Umfragen an die Hand geben.

Wir möchten Ihnen eine Reihe gebräuchlicher Kennzahlen näher bringen, mit denen Sie Ihre Online Umfragen sinnvoll auswerten können. Die Auswahl der Maßzahlen, die besprochen wird ist subjektiv, bildet unserer Meinung aber einige der wichtigsten Kennzahlen ab.

Wir haben versucht das Dokument so praxisorientiert wie möglich zu gestalten, d.h. der Fokus liegt nicht auf der mathematisch-statistischen Herleitung der Kennzahl. Stattdessen beschäftigen wir uns ausführlich mit dem Berechnen der Kennzahl und der Interpretation.
Dieses Dokument richtet sich also vor allem an Einsteiger in Sachen Statistik oder an diejenigen, die Ihre eingeschlafenen Statistik-Kenntnisse auffrischen möchten.
Es wendet sich ausdrücklich nicht an Statistik-Profis - diese werden hier keine neuen Erkenntnisse gewinnen können.

Für ein tiefes statistisches Verständnis empfehlen wir Ihnen ein ausführliches Statistikbuch.

Jede statistische Kennzahl, die im Folgenden besprochen wird möchten wir dem Leser auf vier Ebenen näher bringen:

1. Der Leser soll ein Grundverständnis für die Kennzahl entwickeln („Was sagt diese Kennzahl aus, warum wird sie berechnet?“) und es soll vermittelt werden unter welchen Voraussetzungen die Kennzahl berechnet werden kann.
2. Der Leser soll nachvollziehen können, wie das entsprechende Maß manuell berechnet wird.
3. Dem Leser wird vermittelt, wie er die einzelnen Maße für sehr große Datenmengen mit Hilfe des Statistikprogramms SPSS berechnen kann.
4. Der Leser soll das Ergebnis sinnvoll interpretieren können.

Wir wünschen Ihnen viel Spaß beim Lesen und viel Erfolg beim Auswerten Ihrer Online-Umfrage.

Ihr 2ask Team

3 Grundbegriffe

Bevor eine Reihe wichtiger statistischer Größen definiert, erklärt und interpretiert werden müssen einige Grundbegriffe zum besseren Verständnis geklärt werden.
Es kann sein, dass Ihnen das ziemlich „theoretisch“ vorkommt, es ist aber zum weiteren Vorgehen und Verständnis unabdingbar.

3.1 Grundgesamtheit / Stichprobe

Grundgesamtheit
Umfragen werden mit dem Ziel durchgeführt neue Erkenntnisse über bestimmte Personen (z.B. Kunden, Mitarbeiter) zu erhalten bzw. gültige Aussagen über diese Personen treffen zu können. Die Grundgesamtheit ist dabei die Menge der Personen, für die die Aussagen einer Untersuchung gelten sollen, z.B. "alle Mitarbeiter des Unternehmens X" oder "alle Kunden im Alter von 18 bis 49 Jahren".

In der Realität ist es oft sehr schwer bis beinahe unmöglich alle Personen einer Grundgesamtheit zu befragen. Daher werden Daten nicht an allen Objekten der Grundgesamtheit erhoben, sondern an Stichproben.

Stichprobe
Unter dem Begriff Stichprobe versteht man, dass nur ein Teil der Personen der Grundgesamtheit befragt wird. Die Auswahl bzw. Zusammensetzung der Stichprobe kann auf verschiedene Arten erfolgen. Am gängigsten ist die so genannte Zufallsauswahl.
Es ist wichtig die Grundgesamtheit genau festzulegen, um die Stichprobe nachvollziehbar auszuwählen und exakt angeben zu können, für wen die Untersuchungsergebnisse Gültigkeit beanspruchen.
Auf Basis der Daten der Stichprobe kann man dann Rückschlüsse auf die Grundgesamtheit ziehen.
Damit dieser Schluss von einer Stichprobe auf die Grundgesamtheit zulässig ist müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

- Die Stichprobe muss **groß genug** sein
  Die absolute Untergrenze für eine Stichprobengröße, um gültige Schlüsse von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit ziehen zu können liegt bei 30 Personen. Besser ist eine Stichprobengröße von ca. 100 Personen.
- Die Stichprobe muss "**repräsentativ**" sein.
  Damit ist gemeint, dass die Stichprobe die Zusammensetzung der Grundgesamtheit widerspiegeln soll, also beispielsweise ebenso viele Frauen oder Personen mit Hochschulbildung usw. enthalten soll wie die Grundgesamtheit, der sie entstammt. Dies ist per Definition bei einer Zufallsauswahl der Fall.

3.2 Arten von Merkmalen:

Man kann Merkmale folgendermaßen einteilen:

1. **Qualitativ vs. Quantitativ**

   qualitativ heißen diejenigen Merkmale, deren Ausprägungen unterschiedliche Arten darstellen (z.B. Farbe mit den Ausprägungen: blau, rot, grün, gelb; Familienstand)

   quantitativ heißen diejenigen Merkmale, die von vornherein Zahlen als Ausprägungen haben (z.B. Alter, Entfernung in KM, Umsatz in €)

2. **diskret vs. stetig**

   diskrete Merkmale können nur abzählbar viele Werte annehmen (z.B. Anzahl, Geschlecht)

   stetige Merkmale können jeden Wert eines Kontinuums annehmen (z.B. Gewicht: 63,786 Kg, Länge 4387,35m)

3.3 Skalenniveau

Jeder Merkmalsausprägung kann eine Zahl als Code zugeordnet werden. Das Skalenniveau hängt davon ab, wie die Zuordnung der Zahl zur Merkmalsausprägung erfolgt.
Man unterscheidet folgende Skalenniveaus:

Nominalskala:
Ein Merkmal heißt nominal, wenn seine möglichen Ausprägungen zwar unterschieden, nicht aber in eine Rangfolge gebracht werden können, d.h. verschiedenen Merkmalsausprägungen werden verschiedenen Zahlenwerte zugeordnet.
z.B. blau = 1, rot =2,…
Die einzig zulässige Schlussfolgerung aus einer Nominalskala lautet:
Gleiche Zahlen bedeuten gleiche Merkmalsausprägungen, unterschiedliche Zahlen bedeuten unterschiedliche Merkmalsausprägungen.

Ordinalskala:
Ein Merkmal heißt ordinal, wenn jede Merkmalsausprägung der Untersuchungseinheit genau einer Kategorie zugeordnet wird. Die Kategorien lassen sich in eine Rangfolge bringen und mit Namen oder Zahlen bezeichnen.
Die verschiedenen Merkmalsausprägungen stehen zueinander in einer „größer bzw. kleiner“ – Beziehung, d.h. die Zahlen drücken nicht nur Verschiedenheit, sondern

auch eine zugrunde liegende Ordnung aus (z.B. schwach = 1, mittel = 2, stark = 3, sehr stark = 4, am stärksten = 5)
Eine zulässige Aussage ist, dass die Rangfolge der Zahlen gleich der Rangfolge der Stärke der Merkmalsausprägungen ist. D.h. jemand mit einem höheren Rang hat auch eine höhere Merkmalsausprägung als jemand mit einem niedrigeren Rang. Über die Stärke der Merkmalsausprägung oder die Größe des Merkmalsunterschiedes zwischen Objekten lässt sich aber keine Aussage machen.

Intervallskala:
Ein intervallskaliertes Merkmal ist ein Merkmal, dessen Ausprägung sich quantitativ mittels Zahlen darstellen lässt. Das heißt insbesondere auch, dass Rangunterschiede und Abstand zwischen Werten gemessen werden können, d.h. quantitative Merkmale gehen in ihren Anforderungen über ordinale oder gar nominale Eigenschaften hinaus.
Bei intervallskalierten Merkmalen lassen sich zusätzlich zu den Eigenschaften der Ordinalskala die Abstände zwischen den verschiedenen Merkmalsausprägungen exakt bestimmen.
Die Intervalle (= Abstände) zwischen benachbarten Merkmalsausprägungen sind gleich groß, allerdings existiert kein natürlicher Nullpunkt für die Skala.
Willkürlich definierte Nullpunkte, wie z.B. bei der Celsius-Temperaturskala zählen hier nicht als natürlicher Nullpunkt, während der Nullpunkt der Kelvin-Temperaturskala, der dem absoluten Nullpunkt entspricht, ein natürlicher Nullpunkt ist.

Jede Intervallskala ist so geartet, dass die Rangfolge der Differenz zwischen Zahlen gleich der Rangfolge der Merkmalsunterschiede zwischen den entsprechenden Objekten ist.

Verhältnisskala:
Auf einer Verhältnisskala/ Ratioskala werden Merkmalsausprägungen eingetragen, für die folgendes gilt:

- Merkmalsausprägungen werden als Zahl dargestellt
- für die Zahlenwerte existiert ein natürlicher Nullpunkt und
- die Maßeinheit ist willkürlich definiert

Bei Verhältnisskalen entsprechen die Zahlen der Stärke der Merkmalsausprägungen. Zulässige Aussagen sind z. B. Herr X ist um 15% gewachsen.

Beispiel: Preis in € (natürlicher Nullpunkt: kostenlos), Geschwindigkeit in Km/h (natürlicher Nullpunkt: Stillstand), Gewicht in Kg (natürlicher Nullpunkt: kein Gewicht)

Absolutskala:
Auf einer Absolutskala werden Merkmalsausprägungen eingetragen, für die folgendes gilt:

- Merkmalsausprägungen werden als Zahl dargestellt
- für die Zahlenwerte existiert ein natürlicher Nullpunkt und
- die Maßeinheit ist natürlich gegeben (d. h. im weitesten Sinne 'Stück')

Beispiel: Einwohner eines Landes, Anzahl Fehler

4 Univariate Statistik

Unter dem Begriff „univariate Statistik“ versteht man die isolierte Betrachtung **einzelner** Merkmale bzw. Variablen von Untersuchungseinheiten (= Personen). Man macht nur Aussagen über ein einziges Merkmal (z.B. Alter). Bedeutsame Informationen liefern dabei Lagemaße (siehe Kapitel 4.2) und Streumaße (siehe Kapitel 4.3).

4.1 Beispiel für eine Verteilung

Im Folgenden finden Sie ein Beispiel für eine eindimensionale Verteilung.
Erhoben wurde hierbei das Merkmal Alter.
Auf Basis dieser Daten werden auch die SPSS-Berechnungen in den Kapiteln 4.2.5 und 4.3.3 durchgeführt.

Die ursprüngliche Zuordnung einer Merkmalsausprägung zu einer Person nennt man **Urliste**:

Teilnehmer	Alter
1	21
2	22
3	27
4	21
5	25
6	23
7	27
8	21
9	22
10	21
11	25
12	28

Ordnet man die Urliste nach Stärke der Merkmalsausprägung ergibt sich die **sortierte Liste** daraus:

Rang	Alter
1	21
2	21
3	21
4	21
5	22
6	22
7	23
8	25
9	25
10	27
11	27
12	28

Diese kann man zur **Häufigkeitsverteilung** zusammenfassen:

Alter	Anzahl
21	4
22	2
23	1
25	2
27	2
28	1

Es gilt: Die Summe der Häufigkeiten (Anzahl) ergibt die Gesamtanzahl der Teilnehmer (4+2+1+2+2+1) = 12

4.2 Maßzahlen für die Lage

4.2.1 EXTREMWERTE

Unter **Minimum** versteht man den kleinsten Wert, der in einer Verteilung vorkommt. Das entspricht dem *ersten Wert in der sortierten Liste*. In obigem Beispiel liegt das Minimum für die Merkmalsausprägung Alter bei 21 Jahren.
Minimum (Alter) = 21

Analog dazu versteht man unter **Maximum** den größten Wert, der in einer Verteilung vorkommt. Das entspricht dem *letzten Wert der sortierten Liste*. In obigem Beispiel liegt das Maximum für die Merkmalsausprägung Alter bei 28 Jahren.
Maximum (Alter) = 28

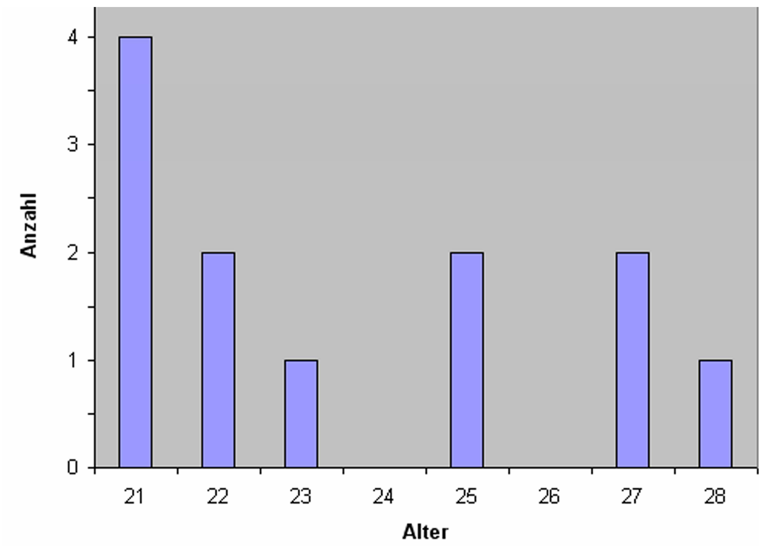
4.2.2 MODALWERT

Der Modalwert ist derjenige Wert mit der größten Dichte, d.h. *der häufigste Wert einer Häufigkeitsverteilung* oder der Wert, mit der größten Wahrscheinlichkeit. Da eine Verteilung mehrgipflig sein kann, können einer Verteilung auch mehrere Modi zugeordnet sein. Der Modalwert ist am einfachsten aus der Häufigkeitstabelle abzulesen (siehe Grafik unten).

Häufigkeitstabelle

Alter	Anzahl
21	4
22	2
23	1
25	2
27	2
28	1

Graphische Darstellung einer Häufigkeitstabelle



In obigem Beispiel liegt der Modalwert bei 21, diese Merkmalsausprägung kommt am häufigsten vor (4 mal).
Der Modalwert kann bei Daten ab Nominalskalenniveau (siehe Kapitel 3.2) bestimmt werden.

4.2.3 MEDIAN

Der Median wird auf Basis der „sortierten Liste“ bestimmt. Er bezeichnet allgemein eine Grenze zwischen zwei Hälften. In der Statistik halbiert der Median eine Stichprobe oder allgemein eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.

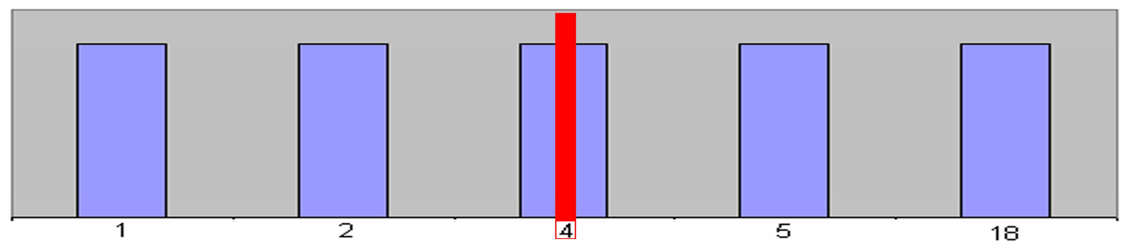
Bei einer Stichprobe ist der Median definiert als jeder Beobachtungswert, bei dem die Werte jeweils mindestens der Hälfte der Beobachtungen kleiner oder gleich und die Werte mindestens der Hälfte größer oder gleich diesem Wert sind

Anders ausgedrückt:
Mindestens die Hälfte aller Werte ist kleiner gleich (<=) dem Median
Mindestens die Hälfte aller Werte ist größer gleich (>=) dem Median

Sortiert man die Beobachtungswerte der Größe nach („sortierte Liste“), so ist der Median bei einer ungeraden Anzahl von Beobachtungen der in der Mitte dieser Folge liegende Beobachtungswert.
Bei einer geraden Anzahl von Beobachtungen gibt es nicht ein mittleres Element, sondern zwei. Bei intervallskalierten Messgrößen verwendet man im Falle einer geraden Anzahl Beobachtungen meist das arithmetische Mittel der beiden mittleren Beobachtungswerte

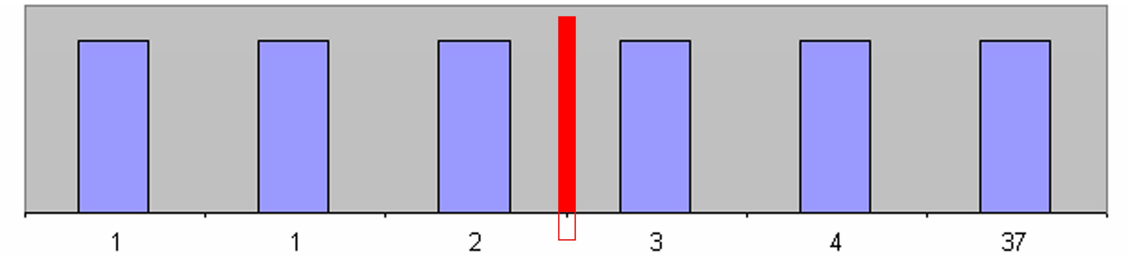
Beispiele:

a) **ungerade Anzahl**
Messwerte 5, 2, 4, 18, 1 → sortierte Liste: 1, 2, 4, 5, 18
Der Median ist der Wert an der mittleren Stelle der sortierten Liste, diese errechnet sich folgendermaßen:
(Anzahl der Messwerte +1) / 2, d.h. (5+1) / 2 = 3 → der Median ist der dritte Messwert, also 4.



b) **gerade Anzahl**
Messwerte 4, 1, 3, 2, 37, 1 → sortierte Liste: 1, 1, 2, 3, 4, 37
Der Median liegt bei der Hälfte der Summe der beiden mittleren Zahlen der sortierten Liste und errechnet sich folgendermaßen:
(Anzahl Teilnehmer) / 2 + [(Anzahl Teilnehmer / 2) +1]

für obiges Beispiel bedeutet das:
[6 / 2]= 3 (→ der dritte Wert ist 2)
[6 / 2] + 1 = 4 (→ der vierte Wert ist 3)
Der Median liegt also zwischen dem dritten und vierten Wert.



Das Mittel über diese beiden mittleren Werte ist [(2+3) / 2], der Median liegt also bei 2,5.
Der Median kann bei Daten ab Ordinalskalenniveau (siehe Kapitel 3.2) bestimmt werden.

4.2.4 ARITHMETISCHES MITTEL (= Mittelwert)

Der Mittelwert wird berechnet, indem die Summe der Einzelwerte des Datenbündels durch die Zahl der Elemente dividiert wird.
Aufgabe des arithmetischen Mittels ist es, Aufschluss über den Durchschnittswert vorliegender Werte zu geben.

Es wird folgendermaßen berechnet:

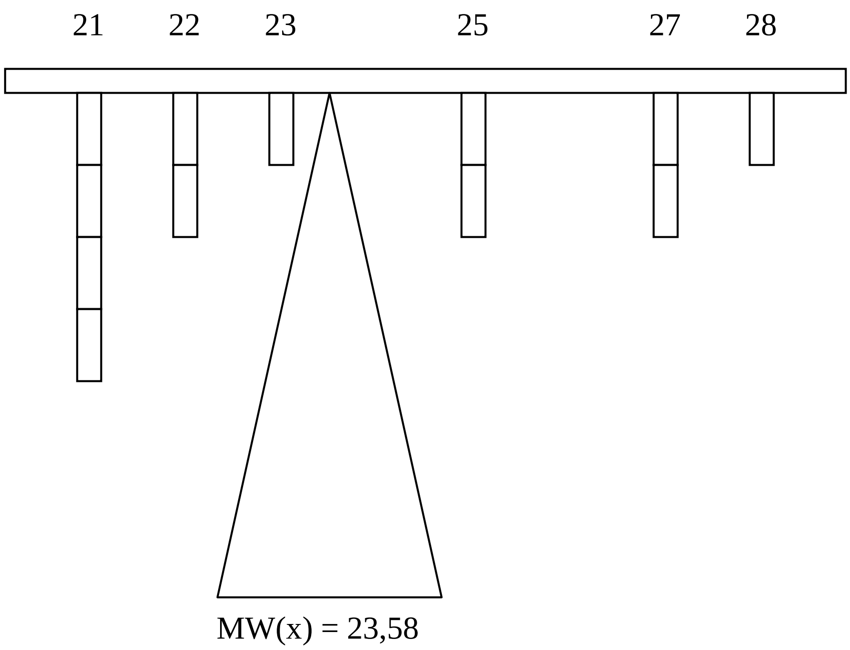
$$MW = \frac{Summe\ \ der\ Einzelmerkmale}{Gesamtanzahl\ der\ Teilnehmer} = \frac{\sum xi}{n}$$

für obiges Beispiel (siehe Kapitel 4.1) ergibt sich:

$$MW = \frac{21+21+21+21+22+22+23+25+25+27+27+28}{12} = 283/12 = 23{,}583333$$

Das arithmetische Mittel beinhaltet Informationen über die Lage eines Datenbündels. Es erfordert mindestens Intervallskalenniveau (siehe Kapitel 3.2).

Das arithmetische Mittel (MW) wird auch als Durchschnitt oder Schwerpunkt bezeichnet. Die Eigenschaft als Schwerpunkt kann anhand eines graphischen Beispiels verdeutlicht werden. Eine Balkenwaage, bei der die Gewichte am Balken hängen hat beim arithmetischen Mittel Ihren Schwerpunkt.



4.2.4.1 Interpretation

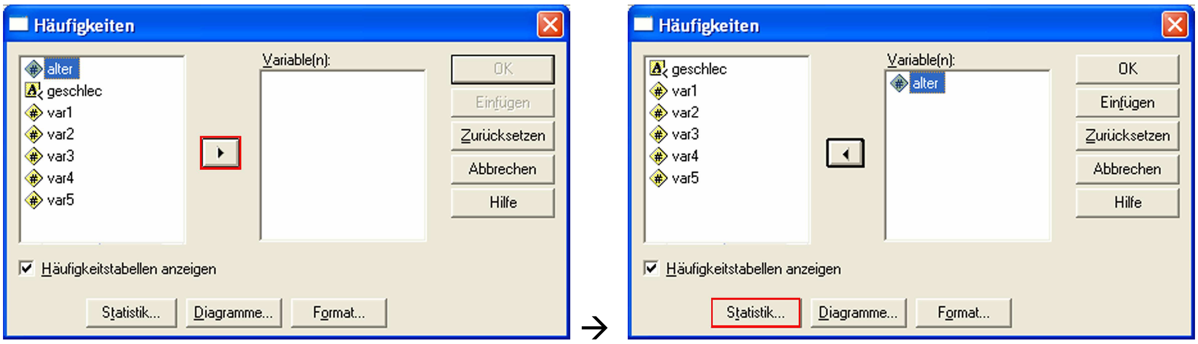
Das arithmetische Mittel kann als Durchschnittswert eines Datenbündels bzw. einer Verteilung interpretiert werden.
Für obiges Beispiel bedeutet das: das Durchschnittsalter der Teilnehmer beträgt knapp 23 ½ Jahre.

Alternative Interpretation:
Bei einer repräsentativen Stichprobe würde man das Alter einer beliebigen Person der Grundgesamtheit auf den Mittelwert schätzen (in diesem Fall würde man den Teilnehmer auf 23,5833 Jahre tippen). Mit diesem Schätzwert würde man, wenn alle Teilnehmer bezüglich ihres Alters geschätzt werden sollten, und die Fehler über alle diese Schätzungen aufaddiert werden würden, die (in der Summe) wenigsten Fehler machen.

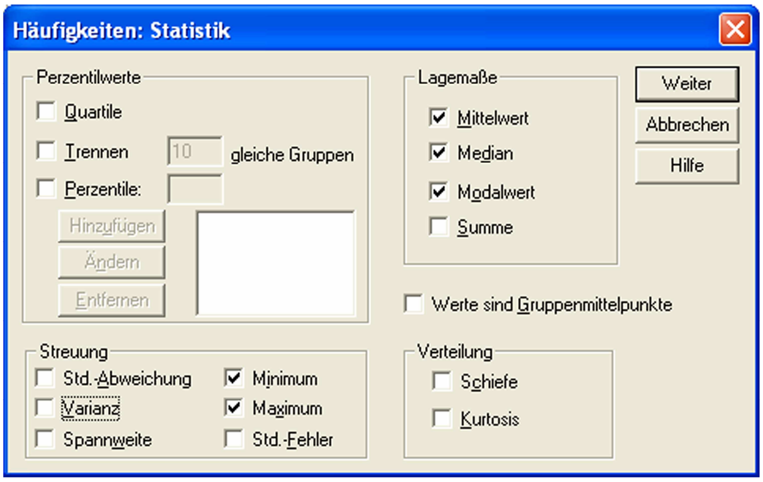
4.2.5 Berechnung der Lagemaße mit SPSS

Besonders für große Datensätze wäre es sehr aufwendig die erläuterten Kennzahlen manuell zu berechnen. Es empfiehlt sich daher die Nutzung einer speziellen Statistik-Software. Eine weit verbreitete Statistik-Software ist SPSS. Im Folgenden wird nun kurz erklärt, wie Sie die beschriebenen Maße in SPSS berechnen können. Eine detaillierte Einführung in SPSS finden Sie in unserer Anleitung für SPSS.

Gehen Sie folgendermaßen vor:
Wählen Sie in SPSS das Menü „Analysieren“ → „Deskriptive Statistiken“ → „Häufigkeiten“.
Es öffnet sich ein neues Fenster. In diesem sehen Sie links alle vorhandenen Variablen aufgelistet. Wählen Sie nun diejenige Variable aus, für die Sie die Maße berechnen lassen möchten (hier: Alter). Markieren Sie dazu die entsprechende Variable und klicken Sie anschließend auf den Pfeil (rot markiert), der die Variable in das rechte Feld verschiebt.



Klicken Sie jetzt auf den [Statistik…]-Button. Es öffnet sich ein neues Fenster, in dem Sie die gewünschten Maße auswählen können.



Klicken Sie nun auf den [Weiter]-Button. Es erfolgt die Berechnung der gewünschten Kennzahlen, die unsere manuell berechneten Ergebnisse bestätigen:

Statistiken

ALTER

N	Gültig	12
	Fehlend	0
Mittelwert		23,58
Median		22,50
Modus		21
Minimum		21
Maximum		28

4.2.6 MEDIAN vs. ARITHMETISCHES MITTEL

4.2.6.1 Welcher Wert ist wann geeignet?

Der Median ist robust (d.h. nicht anfällig) gegenüber extremen Ausreißern, das arithmetische Mittel nicht.

Beispiel: Es liegen 2 Einkommenslisten vor, die sich nur in einem Wert unterscheiden
Liste A: 100, 100, 100, 100, 100, 1300
Liste B: 100, 100, 100, 100, 100, 300

Der Median liegt sowohl bei Liste A als auch bei Liste B bei 100

Das arithmetische Mittel für Liste A liegt bei 300, für Liste B bei 133,33
→ Der Großverdiener in Liste A verändert das arithmetische Mittel stark, nicht aber den Median

Das arithmetische Mittel ist robust bei internen Werteverschiebungen, nicht aber der Median
Beispiel: 2 Vermögenslisten, bei denen einer später allen anderen etwas wegnimmt

Liste A: 200, 200, 200, 200, 200, 200
Liste B: 100, 100, 100, 100, 100, 700

Das arithmetische Mittel liegt sowohl für Liste A als auch für Liste B bei 200
Der Median liegt für Liste A bei 200, für Liste B bei 100

WICHTIG: Das arithmetische Mittel erfordert mindestens Intervallskalenniveau, der Median erfordert lediglich Ordinalskalenniveau!!!!

4.2.7 Alternativen

Um die Anfälligkeit des arithmetische Mittels gegen Extremausreißer abzuschwächen kann man auf zwei alternative Vorgehensweisen zurückgreifen:

4.2.7.1 Das getrimmte Mittel:

Hierbei wird ein vorher festzulegendes Quantum q (z.B. 10%) der kleinsten und größten Werte eliminiert. Anschließend wird das arithmetische Mittel über die verbleibenden Werte berechnet:

Datenbeispiel: 21, 21, 21, 21, 22, 22, 23, 25, 25, 27, 27, 28
Man berechnet nun, wie viele Werte wegfallen: Anzahl Teilnehmer * q

für obiges Beispiel: 12 * 0,1 = 1,2 → Zahlen hinter dem Komma können vernachlässigt werden, d.h. auf beiden Seiten der Daten fällt je ein Wert weg

der kleinste (21) und der größte (28) Wert fallen weg

Getrimmtes Mittel = (3*21 + 2*22 + 1*23 + 2*25 + 2*27) / 10 = 234/10 = 23,4

4.2.7.2 Das winsorisierte Mittel:

Hierbei wird ein vorher festzulegendes Quantum q (z.B. 10%) der kleinsten bzw. größten Werte durch weniger extreme Werte ersetzt. Die Ersatzwerte sind dabei jeweils die ersten, die nicht mehr wegfallen.

Datenbeispiel: 21, 21, 21, 21, 22, 22, 23, 25, 25, 27, 27, 28
Vorgehen: Berechnung wie viele Werte wegfallen: Anzahl Teilnehmer * q

für obiges Beispiel: 12 * 0,1 = 1,2 → Zahlen hinter dem Komma können vernachlässigt werden, d.h. es wird auf beiden Seiten der Daten je ein Wert ersetzt.

Der kleinste Wert (21) wird durch den ersten nicht mehr wegfallenden Wert (21) ersetzt.
Der größte Wert (28) wird durch den ersten nicht mehr wegfallenden Wert (27) ersetzt.
Winsorisiertes Mittel = (4*21 + 2*22 + 1*23 + 2*25 + 3*27) = 282/12= 23,5

Die Interpretation beider beschriebener Alternativen erfolgt analog zur Interpretation des arithmetischen Mittels.

4.3 Maßzahlen für die Streuung

Streuungsmaße sind Maße für die Abweichung einer beliebigen Variable X vom Mittelwert MW(x) einer Verteilung. Diese Maßzahlen geben an wie breit bzw. schmal die Verteilung ist.
Mit Maßzahlen für die Streuung untersucht man beispielsweise folgende Aussage: „Es gibt kaum Unterschiede zwischen den Teilnehmern“

Man geht davon aus, dass die einzelnen Werte nicht weit auseinander liegen (also dass die Verteilung schmal ist). Es werden allerdings keine Aussagen getroffen, *wo* die Werte liegen
WICHTIG: für alle nachfolgend beschriebenen Streuungsmaße muss Intervallskalenniveau (siehe Kapitel 3.2) gelten!

4.3.1 Varianz = Var(x) = s²

Die Varianz ist die Summe der quadrierten Abweichungen der einzelnen Werte eines Datenbündels vom Mittelwert, dividiert durch n (= die Anzahl der Beobachtungen). Die Abweichungen werden quadriert, da sich sonst rechts und links vom Mittelwert liegende Abweichungen gegenseitig aufheben könnten.

WICHTIG: für ein gegebenes (im Sinne von vollständiges) Datenbündel (z.B. eine Mitarbeiterbefragung mit Vollerhebung, bei der tatsächlich **alle** Mitarbeiter teilgenommen haben) gilt die Formel:

$s^2 = \frac{1}{n} * sq$

Handelt es sich bei den Daten um eine Stichprobe (d.h. nicht alle Mitglieder der Grundgesamtheit haben teilgenommen) und soll ein Schätzwert für die Varianz in der Grundgesamtheit berechnet werden, so wird stattdessen die Größe

$s^2 = \frac{1}{n-1} * sq$ verwendet.

Dabei gilt: $sq = \sum [xi - MW(x)]^2$

Die Gesamtformel für die Varianz sieht also folgendermaßen aus:

$Var(x) = (\frac{1}{n-1}) * \sum [xi - MW(x)]^2$

Da es viel Aufwand bedeuten würde, die Varianz für den bekannten Datensatz aus Kapitel 3.1 manuell zu berechnen verwenden wir hier zur Verdeutlichung einen kleineren Datensatz. Die Varianz für den Datensatz aus Kapitel 3.1 wird in Kapitel 4.3.3 mit Hilfe von SPSS berechnet.

BEISPIEL: Alter der Mitarbeiter in Abteilung X: 20, 21, 21, 22, 24, 30

Mittelwert = $\frac{\sum xi}{n} = \frac{(20+21+21+22+24+30)}{6}$ = 138 / 6 = 23.

sq= $\sum[xi - MW(x)]^2$ = (20-23)² + (21-23)² + (21-23)² + (22-23)² + (24-23)² + (30-23)²
sq= (-3)² + (-2)² + (-2)² + (-1)² + (1)² + (7)² = 68
→ s² = $\frac{1}{(n-1)} * sq$ = 1 / 5 * 68 = 13,6

4.3.1.1 Interpretation

Bei der Varianz handelt es sich also um eine Maßzahl, das angibt wie weit die einzelnen Werte im Durchschnitt von Mittelwert entfernt liegen. Der Nachteil der Varianz in der Praxis liegt darin, dass sie eine andere Einheit als die Daten besitzt.

4.3.2 Standardabweichung = Std(x) = s

Die Standardabweichung kompensiert den Nachteil der Varianz, indem sie aus der Quadratwurzel der Varianz gebildet wird und somit dieselbe Einheit wie die Daten besitzt.
Wie bei der Varianz ist zu unterscheiden zwischen der Standardabweichung, die die gegebenen Daten charakterisiert s = $\sqrt{\frac{1}{n} * \sum[xi - MW(x)]^2}$
und der Standardabweichung, die aus Stichprobendaten als Schätzwert für die Grundgesamtheit berechnet wird s = $\sqrt{\frac{1}{n-1} * \sum[xi - MW(x)]^2}$
Es gilt also:

Std(x) = Quadratwurzel der Varianz = $\sqrt{Var(x)}$
Für das Beispiel gilt: Std(x) = $\sqrt{13{,}6}$ = 3, 7

4.3.2.1 Mathematische Bedeutung

Liegt eine Beobachtungsreihe (x1, x2,…,xn) der Länge N vor, so sind empirischer Mittelwert und empirische Standardabweichung die zwei wichtigsten Maßzahlen in der Statistik zur Beschreibung der Eigenschaften der Beobachtungsreihe.

Die Standardabweichung heißt auch mittlerer Fehler oder RMS error (von engl. root mean square). Als Abkürzung findet man neben σ in Anwendungen oft auch s, m.F. oder englisch rms. In der angewandten Statistik findet man häufig die Kurzschreibweise der Art „Ø 21 ± 4“, was als „Mittelwert 21 und Standardabweichung 4“ zu lesen ist.

4.3.2.2 Interpretation

Aus Angaben zu Mittelwert und Standardabweichung ergibt sich die mittlere Schwankungsbreite (gilt im Falle normalverteilter Mengen, wovon man bei zufälligen und ausreichend großen Stichproben ausgehen kann).

Es gilt:
Im Bereich von „Mittelwert ± 1 Standardabweichung" befinden sich ca. 68% aller Teilnehmer der Grundgesamtheit

In unserem Beispiel: MW(x) ± 1*std(x) = 23,5 ± 3,7 = 19,8 bzw. 27,2 Jahre

Bei einer repräsentativen und ausreichend großen Stichprobe könnte man den Schluss ziehen, dass 68% aller Teilnehmer der Grundgesamtheit zwischen 19,8 und 27, 2 Jahre alt sind.
→ In diesem Fall ist der Schluss ungültig, da unsere Stichprobe zu klein ist.

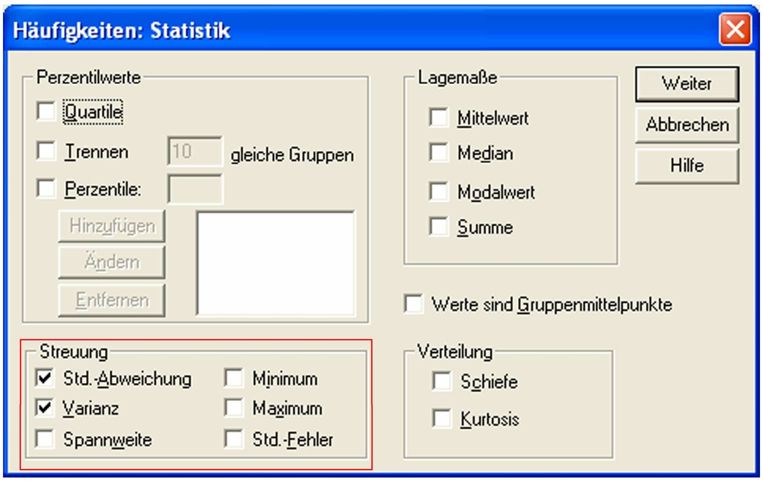
Weiter gilt:
Im Bereich Mittelwert ± 2*Std(x) befinden sich ca. 95% der Teilnehmer

Im Bereich Mittelwert ± 3*Std(x) befinden sich ca. 99% der Teilnehmer

Faustregel für die Praxis
Werte außerhalb der zwei- bis dreifachen Standardabweichung nennt man Ausreißer. Viele Ausreißer können ein Hinweis auf grobe Fehler der Datenerfassung sein.

4.3.3 Berechnung der Streumaße mit Hilfe von SPSS

Die Streumaße werden in SPSS auf dieselbe Art und Weise wie die Lagemaße berechnet.
Wählen Sie in SPSS das Menü „Analysieren“ → „Deskriptive Statistiken“ → „Häufigkeiten“.
Wählen Sie nun diejenige Variable aus, für die Sie die Maße berechnen lassen möchten.
Klicken Sie anschließend auf den [Statistik…]-Button. Hier können Sie unter „Streuung“ die Maße Varianz und Standardabweichung auswählen.



Die Berechnung von Varianz und Standardabweichung mit SPSS führt für den Datensatz aus Kapitel 3.1 zu folgenden Ergebnissen:

Statistiken

ALTER

N	Gültig	12
	Fehlend	0
Standardabweichung		2,68
Varianz		7,17

4.4 Maßzahl für die Symmetrie - Schiefe

Schiefe ist ein Maß für die Symmetrie bzw. Asymmetrie einer Verteilung.
Die Schiefe einer Verteilung gibt also an, wie stark die Verteilung der Datenwerte von einer symmetrischen Verteilung abweicht.

Es gibt eine Reihe unterschiedlicher Maßzahlen für die Schiefe. Viele Schiefe-Maße beziehen sich auf das "dritte Moment" der Verteilung, d.h. auf die in die 3. Potenz der erhobenen Abweichungen der einzelnen Datenwerte vom Mittelwert. Wir verzichten an dieser Stelle auf die Erläuterung dieser Art von Schiefe-Maßzahlen. Stattdessen stellen wir ein einfaches, aber ebenfalls aussagekräftiges Maß für die Schiefe einer Verteilung vor.
Es basiert auf der Erkenntnis, dass das arithmetische Mittel stärker auf extreme Werte als der Median reagiert. Diese Eigenschaft kann genutzt werden um folgendes Maß für die Schiefe einer Verteilung zu berechnen:

$$\text{Schiefe (X)} = \frac{[\mathit{arithmetisches\ Mittel}\ (x) \quad - \quad \mathit{Median}\ (x)]}{\mathit{Standardabweichung}\ (x)}$$

Eine Berechnung dieser Maßzahl ist nur bei metrischen Variablen (siehe Messniveau) zulässig.
Wichtig: Angaben zur Schiefe einer Verteilung sind nur bei eingipfliger Häufigkeitsverteilung sinnvoll.

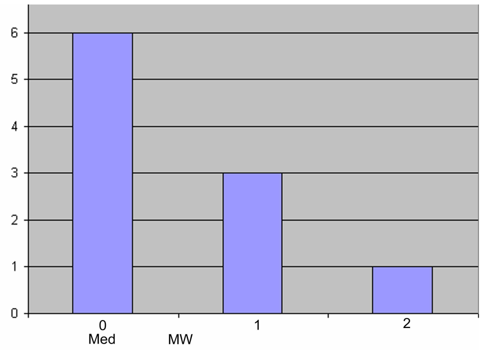
Man unterscheidet die folgenden drei Arten von Schiefe:

- **Rechtsschiefe Verteilungen** (= linkssteil)

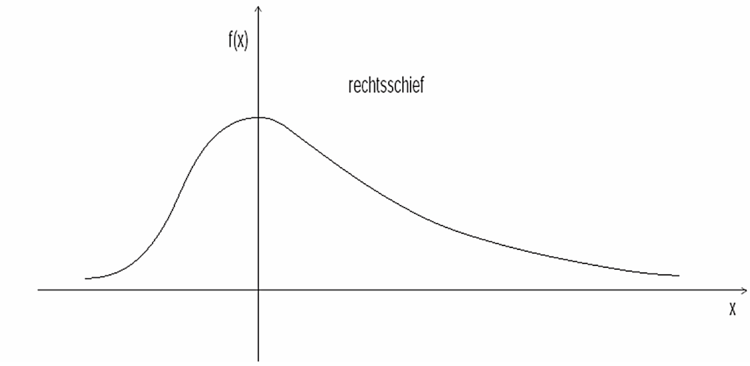
Bei rechtsschiefen Verteilungen ist das arithmetische Mittel (= MW) größer als der Median (= Med).
Werte, die kleiner sind als der Mittelwert, sind dabei häufiger zu beobachten. Der Median befindet sich also links vom Mittelwert. Der Schiefewert ist größer als Null.

rechtsschief	
x_i	n
0	6
1	3
2	1

MW(x) = 0,5
Med(x) = 0
Std(x) = 0,71
→ Schiefe = 0,7



Die graphische Darstellung einer rechtsschiefen Verteilung mit stetigen Daten würde folgendermaßen aussehen:



Hierfür gilt: Der Gipfel der Verteilung befindet sich links vom Mittelwert. Die Kurve flacht nach rechts hin ab.

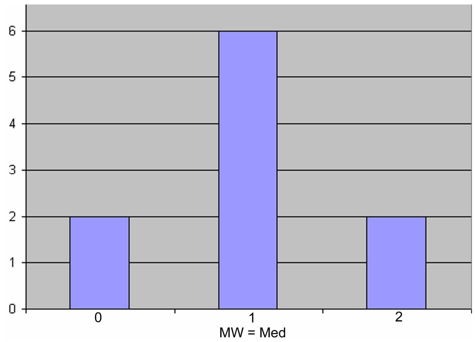
Rechtsschiefe Verteilungen findet man z.B. häufig beim Pro-Kopf-Einkommen. Hier gibt es sehr viele Personen mit eher niedrigem Einkommen und nur wenige Personen mit extrem hohem Einkommen und

- **Symmetrische Verteilung**

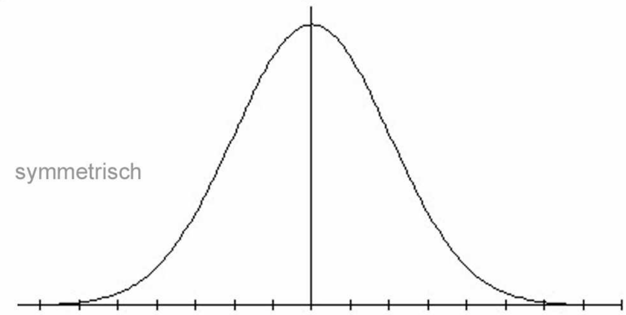
Bei symmetrischen Verteilungen sind arithmetisches Mittel und Median gleich. Werte, die kleiner bzw. größer sind als der Mittelwert, sind dabei gleich oft zu beobachten. Der Schiefewert ist Null.

symmetrisch	
x_i	n
0	2
1	6
2	2

MW(x) = 1
Med(x) = 1
Std(x) = 0,66
→ Schiefe = 0



Die graphische Darstellung einer symmetrischen Verteilung mit stetigen Daten würde folgendermaßen aussehen:



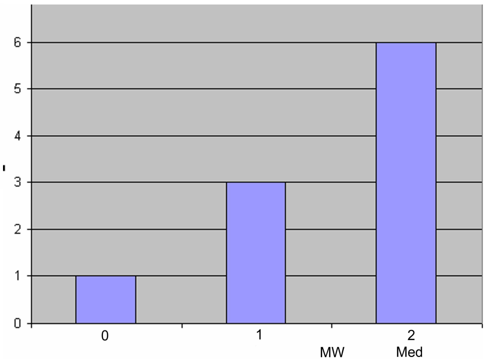
Hierfür gilt: Der Gipfel der Verteilung entspricht dem Mittelwert.

- **Linksschiefe Verteilungen** (= rechtssteil)

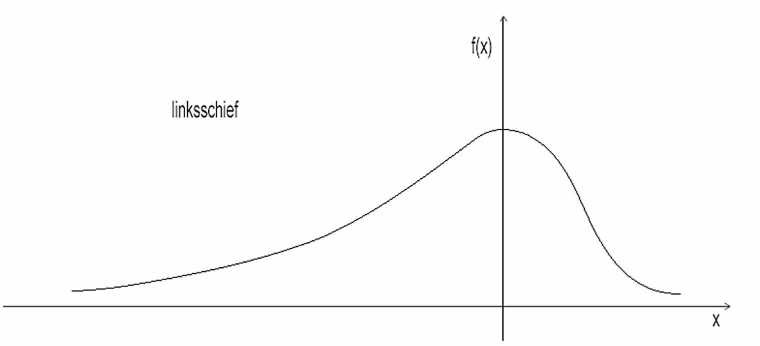
Bei linksschiefen Verteilungen ist das arithmetische Mittel kleiner als der Median. Werte, die größer sind als der Mittelwert, sind dabei häufiger zu beobachten. Der Median befindet sich also rechts vom Mittelwert. Der Schiefe-Wert ist kleiner als 0.

linksschief	
x_i	n
0	1
1	3
2	6

MW(x) = 1,5
Med(x) = 2
Std(x) = 0,71
→ Schiefe = -0,7



Die graphische Darstellung einer linksschiefen Verteilung mit stetigen Daten würde folgendermaßen aussehen:



Eine linksschiefe Verteilung hat einen Gipfel rechts und einen lang gezogenen linken Ausläufer, d.h. die Kurve steigt von links langsam an (bzw. flacht nach links hin ab).

Allgemein gilt: Es gibt nur wenige Merkmale, die linksschief verteilt sind (meistens ist eine natürliche obere Schranke gegeben ist).

5 Zusammenhangsmaße

Im Gegensatz zu den vorangegangenen Kapiteln werden nun die verschiedenen erhobenen Variablen nicht mehr einzeln und voneinander isoliert betrachtet (= univariate Statistik), sondern miteinander in Verbindung gebracht. Es werden zwei Merkmale gleichzeitig betrachtet (= bivariate Statistik)

5.1 Lineare Zusammenhänge

Alle Zusammenhangsmaße, die in diesem Kapitel besprochen werden untersuchen ausschließlich **lineare Zusammenhänge** zwischen zwei Variablen.

Lineare Zusammenhangsmaße untersuchen, ob zwischen einer Variablen X (z.B. Geschlecht) und einer Variablen Y (z.B. Produkt gekauft ja/nein) ein linearer Zusammenhang besteht.
Linear bedeutet dabei in Form einer Geraden oder etwas freier übersetzt „geradlinig, linienförmig, stetig verlaufend“. Ein linearer Zusammenhang hat die Form $y = a + b*x$. Korrelationen geben Auskunft darüber, wie gut sich durch zwei Messwertreihen jeweils eine Gerade legen lässt, so dass die Quadrate der Abstände der Messwerte von der Geraden minimal werden.

Lineare Zusammenhänge sind die am meisten untersuchten Zusammenhänge.

Auf Basis von linearen Zusammenhangsmaßen können lediglich Aussagen darüber getätigt werden, ob zwei Variablen linear zusammenhängen.

Eine allgemeine Aussage der Form „zwischen den beiden Variablen besteht kein Zusammenhang“ kann nicht getroffen werden, da mit diesen Maßen keine Aussagen über andere Arten von Zusammenhängen (z.B. U-förmige Zusammenhänge) möglich sind.

Wenn im Folgenden von Zusammenhängen oder Zusammenhangsmaßen die Rede ist sind immer lineare Zusammenhänge bzw. lineare Zusammenhangsmaße gemeint.

5.1.1 Die verschiedenen Zusammenhangsmaße

Es gibt eine Reihe verschiedener Zusammenhangsmaße. Alle dieser Maße untersuchen lineare Zusammenhänge.

Die Frage, **wann welches Maß** verwendet wird, ist **abhängig vom Skalenniveau** der Daten.

Mit der Hilfe von Zusammenhangsmaßen versucht man die Beziehung zwischen zwei Variablen zu untersuchen.
Es gibt dabei für jedes Skalenniveau (siehe Kapitel 3.2) spezifische Zusammenhangsmaße.

- Zusammenhangsmaß für *zwei nominalskalierte Variablen*:
  Phi-Koeffizient (Φ) für den Zusammenhang von genau 2 Merkmalen mit jeweils genau 2 Merkmalsausprägungen (siehe Kapitel 5.4.5.)
  Cramers V für den Zusammenhang von 2 Merkmalen mit mehr als 2 Merkmalsausprägungen (Kapitel 5.4.7)
- Zusammenhangsmaß für *zwei ordinalskalierte Variablen*
  Spearmans roh = Rangkorrelationskoeffizient
  betrachtet die Rangplatzdifferenz (di) von zwei verschiedenen Beurteilungen (Kapitel 5.5.1)

  Tau b (= τ_b)
  paarweiser Vergleich jeder einzelnen Untersuchungseinheit mit jeder anderen Untersuchungseinheit (Kapitel 5.5.3)
- Zusammenhangsmaß für *zwei intervallskalierte (=metrische) Variablen*
  Korrelationskoeffizient r (= Produkt-Moment-Korrelation (engl.: Bravais-Pearson'scher Korrelationskoeffizient oder Pearson's r)
  bezeichnet durch statistische Kennzahlen ausdrückbare Zusammenhänge zwischen zwei Variablen (Kapitel 5.6.1)
- Zusammenhangsmaß für *eine metrische und eine nominal- bzw. ordinalskalierte Variable*
  eta (= η)
  beschreibt den Zusammenhang zwischen einer nominal- oder ordinalskalierten unabhängigen Variablen und einer intervallskalierten abhängigen Variable (Kapitel 5.7.1)

5.1.2 Allgemeine Kennzeichen linearer Zusammenhangsmaße

Die folgenden Aussagen gelten für **alle** (!) linearen Zusammenhangsmaße:

- Der Zusammenhang zwischen X und Y entspricht dem Zusammenhang zwischen Y und X
  → formal: **[Z(x,y)] = [Z(y,x)]**

- Der Zusammenhang zwischen X und X ist immer 1
  → formal: **[Z(x,x)] = 1**

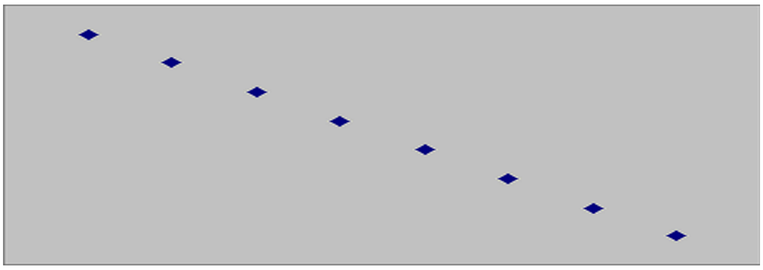
- Der Zusammenhang zwischen Y und Y ist immer 1
  → formal: **[Z(y,y)] = 1**

- Lineare Zusammenhangsmaße liegen in einem Wertebereich zwischen **minimal -1 und maximal +1**.
  → Werte *außerhalb* dieses Bereiches sind *nicht möglich*!!!

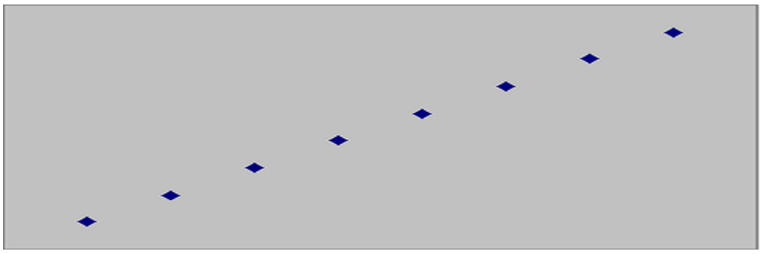
5.1.3 Graphische Darstellung linearer Zusammenhänge

Es gilt:

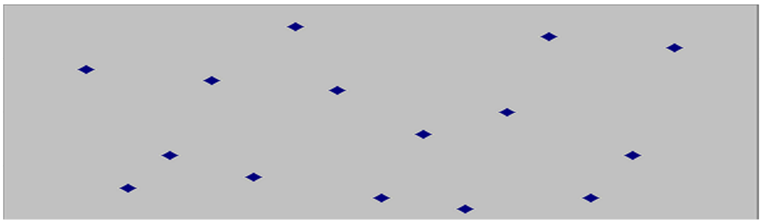
„**-1**“ spiegelt einen **perfekten negativen Zusammenhang** der Form „je größer X, desto kleiner Y" wider und würde graphisch dargestellt folgendermaßen aussehen:



„**+1**“gibt einen **perfekten positiven Zusammenhang** der Form "je größer X, desto größer Y" wider und würde graphisch dargestellt folgendermaßen aussehen:

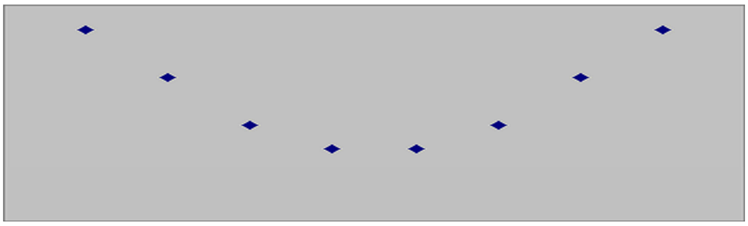


Wenn der Wert für das Zusammenhangsmaß **0** aufweist, besteht **kein linearer Zusammenhang** zwischen den beiden Variablen.



Der hier abgebildete Zusammenhang beträgt mit -0,02 beinahe Null.

Wie bereits erwähnt können Variablen allerdings in **nicht-linearer** Weise (z.B. U-förmig) **zusammenhängen**.



Lineare Zusammenhangsmaße geben für den hier abgebildeten Zusammenhang einen Wert von 0,00 an. Allerdings ist zu erkennen, dass ein **ausgeprägter U-förmiger Zusammenhang** besteht.

5.1.4 Interpretationsrichtlinien für Zusammenhangsmaße

Für alle in Kapitel 5.1.1 erwähnten Zusammenhangsmaße können die Werte (=M) bzw. Ergebnisse, unabhängig vom Skalenniveau, wie folgt interpretiert werden:

M = 1	perfekter positiver Zusammenhang	„Je mehr X, desto mehr Y“
0,7 < M < 0,99	sehr starker positiver Zusammenhang	
0,5 < M < 0,69	starker positiver Zusammenhang	
0,3 < M < 0,49	mittelstarker positiver Zusammenhang	
0,2 < M < 0,29	schwacher positiver Zusammenhang	
M = 0	statistische Unabhängigkeit, d.h. es besteht kein Zusammenhang	
-0,2 < M < -0,29	schwacher negativer Zusammenhang	
-0,3 < M < -0,49	mittelstarker negativer Zusammenhang	
-0,5 < M < -0,69	starker negativer Zusammenhang	
-0,7 < M < -0,99	sehr starker negativer Zusammenhang	
M = -1	perfekter negativer Zusammenhang	„Je mehr X, desto weniger Y“

Ein Zusammenhang, egal ob positiv oder negativ ist **erst ab einem Betrag von 0,2 ein statistischer Zusammenhang**, da er vorher noch zu gering ist, d.h. eher zufällig.In dem Fall ist als Interpretation gültig: Der Zusammenhang geht gegen Null.

Die Wahl des Zusammenhangsmaßes ist **abhängig vom Skalenniveau** der Variablen.

Die verschiedenen Maße werden nun in folgender Reihenfolge erklärt:

- Zusammenhangsmaße für zwei nominalskalierte Variablen (Phi, Cramers V) [Kapitel 5.4]
- Zusammenhangsmaße für zwei ordinalskalierte Variablen (Spearmans roh, Tau b) [Kapitel 5.5]
- Zusammenhangsmaß für zwei intervallskalierte (=metrische) Variablen (Korrelationskoeffizient r) [Kapitel 5.6]
- Zusammenhangsmaß für eine metrische und eine nominal- bzw. ordinalskalierte Variable (eta) [Kapitel 5.7]

5.2 Einführung

Wenn Sie den Zusammenhang zwischen zwei Variablen X und Y untersuchen möchten, ist es ein erster wichtiger Schritt die Daten in einer sinnvollen Form anzuordnen. Eine übersichtliche Darstellung der Daten erfolgt in einer Kreuztabelle. Diese hat folgende allgemeine Form:

Variable x

	Ausprägung	x_1	x_2	x_3	…	x_j	
	y_1	f11	f12	f13		f1j	$\sum$ Zeile 1
Variable y	y_2	f21	f22	f23		f2j	$\sum$ Zeile 2
	y_3	f31	f32	f33		f3j	$\sum$ Zeile 3
	…						
	y_i	fi1	fi2	fi3		fij	$\sum$ Zeile i
		$\sum$ Spalte 1	$\sum$ Spalte 2	$\sum$ Spalte 3		$\sum$ Spalte j	$\sum$ = N

Die Variable X wird dabei in den Spalten abgetragen (x_1, x_2,…x_i), die Variable Y in den Zeilen (y_1, y_2,…,y_i).
Es gilt: eine Kreuztabelle hat die Form r *c. Dabei steht r für “row“ (engl. Zeile) und c für “column“ (engl. Spalte).
Demnach sind beispielsweise folgende Formate möglich: 2x2-Kreuztabelle, 4x3-Kreuztabelle, 5x7-Kreuztabelle…

Die allgemeine Bezeichnung der einzelnen Felder lautet f_{ij}. Diese setzt sich folgendermaßen zusammen:
die erste Zahl (Bezeichnung i) bezieht sich auf die Y-Variable, d.h. die Zeilenposition, die zweite (Bezeichnung j) auf die X-Variable, d.h. die Spaltenposition.
Ein Beispiel: f_{23} bezeichnet das Feld in der zweiten Zeile, dritte Spalte

Variable x

	Ausprägung	x_1	x_2	x_3	…	x_j	
	y_1	f11	f12	f13		f1j	$\sum$ Zeile 1
Variable y	y_2	f21	f22	$\boxed{\text{f23}}$		f2j	$\sum$ Zeile 2
	y_3	f31	f32	f33		f3j	$\sum$ Zeile 3
	…						
	y_i	fi1	fi2	fi3		fij	$\sum$ Zeile i
		$\sum$ Spalte 1	$\sum$ Spalte 2	$\sum$ Spalte 3		$\sum$ Spalte j	$\sum$ = N

Für einige der nachfolgenden Zusammenhangsmaße ist es notwendig, die Randsummen zu berechnen.

Um die Randsumme für Zeile 1 (∑ Zeile 1) zu berechnen werden alle Felder der ersten Zeile addiert,

d.h. f11 + f12 + f13 + … + f1j oder kürzer ausgedrückt: $\sum_{j=1}^{c} f1j$

Um die Randsumme für die Spalte 1 (∑Spalte 1) zu berechnen werden alle Felder der ersten Spalte addiert,

d.h. f11 + f21 + f31 + … + fi1 oder kürzer ausgedrückt $\sum_{i=i}^{r} fi1$

Die Summe aller Zeilen **und** aller Spalten ergibt die Anzahl der Gesamtfälle = N

5.3 Theoretische Herleitung

Es gilt: Zwischen zwei Variablen besteht *kein* Zusammenhang, wenn ihr gemeinsames Auftreten einer zufälligen Verteilung entspricht.
Treten sie aber wesentlich öfter gemeinsam auf als es bei einer zufälligen Verteilung zu erwarten wäre spricht man von einem Zusammenhang.
Um zu untersuchen, ob zwischen zwei Variablen ein Zusammenhang besteht vergleicht man also die gegebene (empirische) Verteilung der Daten mit der erwarteten, theoretischen (zufälligen) Verteilung.
Die Erwartung für das gemeinsame Auftreten zweier Merkmale bei zufälliger Verteilung (d.h. die theoretische Verteilung) ergibt sich aus den Regeln der Kombinatorik.
Man multipliziert die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der einzelnen Merkmale, wobei die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Merkmals identisch ist mit der relativen Häufigkeit des Merkmals in der untersuchten Gruppe.

5.4 Zusammenhangsmaß für zwei nominalskalierte Variablen

Die gebräuchlichsten Maße für den Zusammenhang zweier nominalskalierter Variablen sind Phi (φ) und Cramers V.
Phi wird berechnet, wenn der Zusammenhang zweier Merkmale mit jeweils genau zwei Merkmalsausprägungen untersucht werden soll (d.h. bei einer 2x2-Kreuztabelle). Cramers V wird berechnet, wenn ein Merkmal mehr als 2 mögliche Ausprägungen besitzt.

Um die Zusammenhangsmaße Phi (φ) und Cramers V berechnen zu können muss vorher die Berechnung des Faktors χ^2 (Chi-Quadrat) erfolgen.
Chi-Quadrat (χ^2) basiert auf der folgenden Überlegung:
Besteht ein Unterschied zwischen der existierenden (empirischen) Beziehung und der theoretischen (zufälligen) Beziehung?

5.4.1 Erstellung von Kreuztabellen

Die Vorgehensweise, wie eine Kreuztabelle erstellt wird möchten wir Ihnen an dieser Stelle anhand eine Beispiels verdeutlichen (Die folgenden Daten werden in Kapitel 5.4.2 für die Erstellung von Kreuztabellen in SPSS sowie der Berechnung von chi² mit Hilfe von SPSS (Kapitel 5.4.4) und der Berechnung der Maße Phi und Cramers V mit Hilfe von SPSS (Kapitel 5.4.6) verwendet).

Eine Kindergartengruppe besteht aus insgesamt 20 Kindern (N=20), die Hälfte sind Jungen, die Hälfte Mädchen. Die Kinder wurden gefragt, ob sie lieber mit Lego oder mit Puppen spielen. Die Antworten (= **empirische Verteilung**) der Kinder sehen Sie in nachfolgender Abbildung:

Geschlecht

		Jungen	Mädchen	
Lieblingsspielzeug	Lego	9	3	12
	Puppen	1	7	8
		10	10	20

Man kann erkennen, dass die Gruppe aus insgesamt 10 Mädchen (50%) und 10 Jungen (50%) besteht, wobei insgesamt 12 Kinder (60%) angeben, dass sie am liebsten mit Lego spielen und 8 Kinder (40%) geben an, dass sie Puppen bevorzugen.

Die Erstellung der **theoretische Verteilung** basiert auf folgender Annahme:
Wenn *kein* Zusammenhang zwischen diesen Variablen (Geschlecht des Kindes und Lieblingsspielzeug) besteht, dann dürfte es *nur vom Zufall abhängen*, ob z.B. ein Junge lieber mit Lego oder Puppen spielt.

Konkret gehen Sie bitte folgendermaßen vor:
Bilden Sie eine Tabelle mit gleicher Anzahl an Zeilen und Spalten wie in der empirischen Verteilung. Übernehmen Sie die Randhäufigkeiten der Zeilen und Spalten.

Geschlecht

Lieblingsspielzeug

	Jungen	Mädchen	
Lego			12
Puppen			8
	10	10	20

Es gilt:
Die Gesamtanzahl der Kinder, die Jungen sind beträgt 10.
Die Gesamtanzahl der Kinder, die am liebsten mit Lego spielen beträgt 12.

Es müssten also $\frac{10*12}{N}$ (N= Gesamtanzahl Kinder, hier: N=20) = $\frac{10*12}{20}$ = 6 Jungen angeben, dass sie am liebsten mit Lego spielen

D.h.: Um die theoretische Verteilung für die einzelnen Felder zu erstellen multipliziert man die entsprechenden Randhäufigkeiten und teilt diese durch die Gesamtanzahl N.

Die Zellen werden nun wie folgt berechnet:

fe11 (Jungen-Lego) = $\frac{\sum Zeile1 * \sum Spalte1}{N} = \frac{12*10}{20}$ = 6 (siehe oben)

fe12 (Jungen-Puppen) = $\frac{\sum Zeile1 * \sum Spalte1}{N} = \frac{8*10}{20}$ = 4

fe21 (Mädchen-Lego) = $\frac{\sum Zeile1 * \sum Spalte1}{N} = \frac{12*10}{20}$ = 6

fe22 (Mädchen-Puppen) = $\frac{\sum Zeile1 * \sum Spalte1}{N} = \frac{8*10}{20}$ = 4

Übersichtlicher dargestellt ergibt sich für die theoretische Verteilung:

	Jungen	Mädchen	
Lego	6	6	12
Puppen	4	4	8
	10	10	20

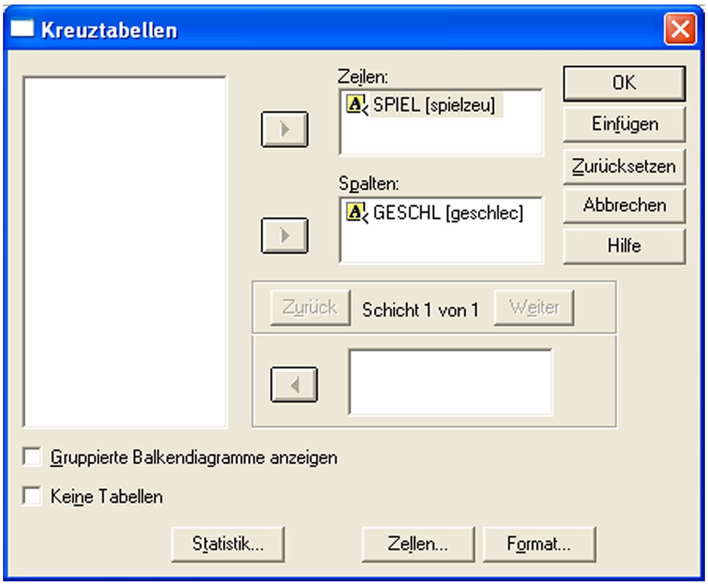
Oft kann es hilfreich sein, die theoretische Verteilung nicht in Form absoluter Zahlen, sondern als **Anteile** dazustellen. Dazu dividiert man die für die einzelnen Merkmale berechneten Anzahlen durch die Gesamtanzahl N. Es ergeben sich dabei folgende Anteile:

	Jungen	Mädchen	
Lego	6/20 = 0,3 = 30%	6/20 = 0,3 = 30%	12/20 = 0,6 = 60%
Puppen	4/20 = 0,2 = 20%	4/20 = 0,2 = 20%	8/20 = 0,4 = 40%
	10/20 = 0,5 = 50%	10/20 = 0,5 = 50%	20/20 = 1 = 100%

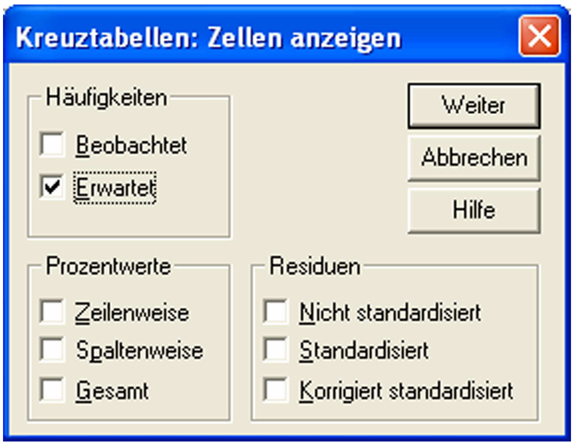
Nun wird die theoretische Verteilung mit der empirischen verglichen.
Dabei gilt:
Wird für *Jungen*, die mit *Puppen* spielen in der Realität der Kindergruppe (d.h. in der empirischen Verteilung) der Wert von 20% (der sich aus der theoretischen Verteilung ergibt, siehe oben) unterschritten (oder überschritten), dann tritt die Kombination dieser beiden Merkmale in der (tatsächlichen, d.h. empirischen) Verteilung "überzufällig" selten (bzw. oft) auf. Dies deutet darauf hin, dass zwischen den Variablen Geschlecht und Lieblingsspielzeug ein statistischer Zusammenhang besteht.

5.4.2 Erstellen von Kreuztabellen in SPSS

Wählen Sie in SPSS das Menü „Analysieren“ → „Deskriptive Statistiken“ → „Kreuztabellen“.
Ordnen Sie nun die Variablen den Zeilen und Spalten zu.



Klicken Sie nun auf den [Zellen]-Button. Es öffnet sich ein neues Fenster. Hier können Sie festlegen, ob Sie sich die empirische Verteilung (= Beobachtet) oder die theoretische Verteilung (= Erwartet) oder beide anzeigen lassen möchten.



Aus Gründen der Übersichtlichkeit soll im Folgenden nur die theoretische Verteilung dargestellt werden. SPSS bestätigt dabei unsere manuell berechneten Ergebnisse:

SPIEL * GESCHLEC Kreuztabelle

Erwartete Anzahl

		GESCHLEC		
		m	w	Gesamt
SPIEL	lego	6,0	6,0	12,0
	Puppen	4,0	4,0	8,0
Gesamt		10,0	10,0	20,0

5.4.3 Berechnung von chi-Quadrat auf Basis von Kreuztabellen

„Chi-quadrat“ (χ^2) lässt sich nach folgender Formel berechnen:

$$\chi^2 = \sum \frac{(fb - fe)^2}{fe}$$

dabei gilt:
f_b= absolute Häufigkeit der empirischen Verteilung
f_e= absolute Häufigkeit der theoretischen Verteilung

Bei der Berechnung von χ^2 geht man folgendermaßen vor:

1.) Bestimmung von fb:
Übernahme der Daten aus der empirischen Verteilung

2.) Bestimmung von fe
Übernahme der Daten aus der theoretischen Verteilung

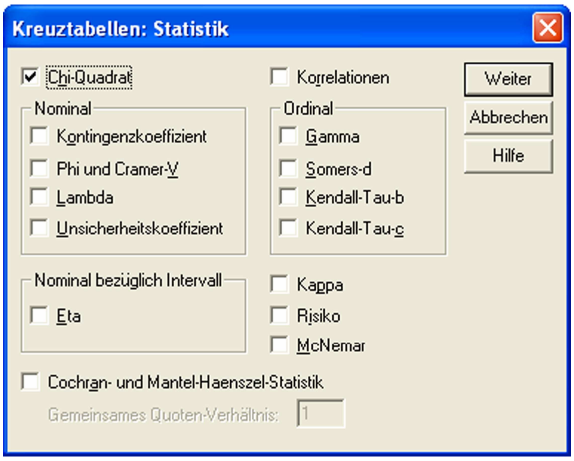
3.) Berechnung von Chi² nach obiger Formel

Zeile	Spalte	fb	fe	(fb – fe)	(fb – fe)²	$\frac{(fb - fe)^2}{fe}$
1	1	9	6	3	9	9 / 6 = 1,5
1	2	3	6	(-3)	9	9 / 6 = 1,5
2	1	1	4	(-3)	9	9 / 4 = 2,25
2	2	7	4	3	9	9 / 4 = 2,25
		N = 20	N = 20			
						$\sum = \chi^2 = 7{,}5$

WICHTIG: Die Berechnung des χ^2-Wertes alleine lässt noch keine Interpretation über den Zusammenhang zu. Dazu ist die Berechung der Zusammenhangsmaße Phi (Φ) (siehe Kapitel 5.4.5) oder Cramers V (siehe Kapitel 5.4.7) notwendig.
Die Ermittlung dieser beiden Zusammenhangsmaße basiert auf der Berechnung von χ^2.

5.4.4 Berechnung von chi² mit Hilfe von SPSS

Für die Berechnung von chi-Quadrat geht man folgendermaßen vor:
Wählen Sie in SPSS „Analysieren“ → „Deskriptive Statistiken“ → „Kreuztabellen“.
Klicken Sie auf den [Statistik…]-Button. Es öffnet sich folgendes Fenster:



Klicken Sie Chi-Quadrat an. SPSS bestätigt das manuell berechnete Ergebnis.

Chi-Quadrat-Tests

	Wert	df	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	Exakte Signifikanz (2-seitig)	Exakte Signifikanz (1-seitig)
Chi-Quadrat nach Pearson	7,500	1	,006		
Kontinuitätskorrektur	5,208	1	,022		
Likelihood-Quotient	8,202	1	,004		
Exakter Test nach Fisher				,020	,010
Anzahl der gültigen Fälle	20				

Um den im oberen Beispiel ermittelten Wert von $\chi^2 = 7{,}5$ zu interpretieren muss die Gesamtanzahl N berücksichtigt werden, d.h. würde man eine Aussage über den Zusammenhang zwischen den beiden Variablen „Geschlecht“ und „Lieblingsspielzeug“ treffen, müsste immer auch die Fallzahl N mit angegeben werden.
Dieser Nachteil wird umgangen, wenn auf Basis des χ^2-Wertes die Koeffizienten Phi (Φ) oder Cramers V berechnet werden

5.4.5 Phi - Koeffizient

Der Phi-Koeffizient (φ) bezeichnet den Zusammenhang zweier dichotomer Merkmale (Merkmale, die nur je zwei Ausprägungen annehmen können, z.B. Geschlecht, ja-nein oder haben - nicht haben). Der Phi-Koeffizient Φ wird also nur bei 2x2-Tabellen berechnet, d.h. wenn der Zusammenhang zwischen genau zwei Merkmalen (hier: Geschlecht und Lieblingsspielzeug) mit jeweils genau 2 Ausprägungen (Jungen-Mädchen; Lego-Puppen) berechnet wird.

Der Phi-Koeffizient (φ) kann mit Hilfe des χ^2-Wertes auf folgende Art und Weise berechnet werden:

$\Phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}}$, in diesem Beispiel: $\Phi = \sqrt{\frac{7{,}5}{20}} = \sqrt{0{,}375} = 0{,}612$

Die Berechnung von Φ kann auch ohne vorherige Berechnung von χ^2 erfolgen. Dazu muss man die gegebenen Daten in Anteile umrechnen.

Beispiel: mit N = 20 Kindern

	Jungen	Mädchen
Lego	9	3
Puppen	1	7

Um Phi (φ) zu berechnen werden nun die Randsummen berechnet und dann die Anteile der Merkmalskombinationen.

	Jungen	Mädchen	
Lego	**A** = 9/20=0,45	**B** = 3/20=0,15	**E** = 12/20=0,6
Puppen	**C** = 1/20=0,05	**D** = 7/20=0,35	**F** = 8/20=0,4
	G = 10/20=0,5	**H** = 10/20=0,5	20/20=1

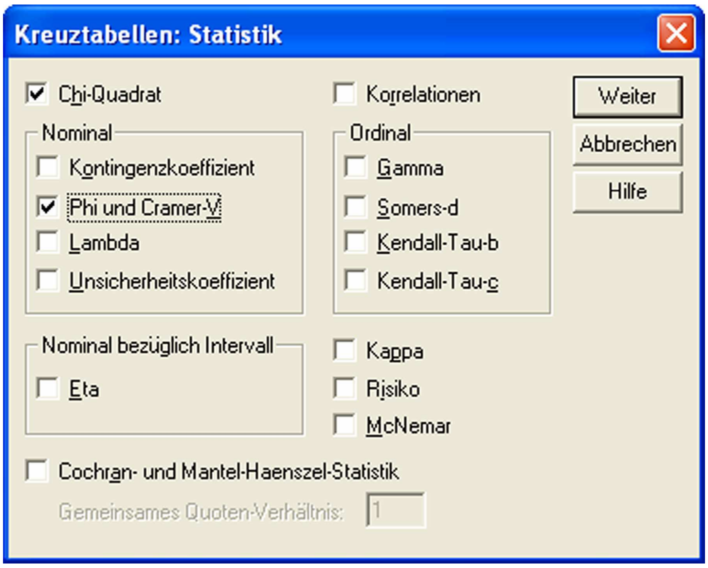
Die Formel für Phi (φ) lautet: $\varphi = \frac{A*D - B*C}{\sqrt{E*F*G*H}}$

Für dieses Beispiel ergibt sich:

Phi (φ)= $\frac{0{,}45*0{,}35 - 0{,}15*0{,}05}{\sqrt{0{,}6*0{,}4*0{,}5*0{,}5}} = \frac{0{,}1575 - 0.0075}{\sqrt{0{,}24*0{,}25}} = 0{,}612$

5.4.6 Berechnung von Phi (φ) mit Hilfe von SPSS

In SPSS werden Phi und Cramers V, das in Kapitel 5.4.7 erklärt wird immer zusammen ausgegeben. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:
Wählen Sie in SPSS „Analysieren“ → „Deskriptive Statistiken“ → „Kreuztabellen“.
Klicken Sie auf den [Statistiken]-Button. Es öffnet sich folgendes Fenster:



Die Berechnung mit SPSS bestätigt unser manuell berechnetes Ergebnis für den Phi-Koeffizient für das 2x2-Design aus Kapitel 5.4.5:

Symmetrische Maße

		Wert	Näherungsweise Signifikanz
Nominal- bzgl. Nominalmaß	Phi	,612	,006
	Cramer-V	,612	,006
Anzahl der gültigen Fälle		20	

5.4.7 Cramers V

Cramers V ist ein Kontingenzkoeffizient, der ebenfalls auf χ^2 basiert und immer zwischen 0 und 1 liegt. Es handelt sich um eine Maßzahl für die Stärke des Zusammenhangs zwischen zwei nominalskalierten Variablen wenn (mindestens) eine der beiden Variablen ***mehr als zwei*** Ausprägungen hat (z.B. 5x4-Tabelle, 2x3-Tabelle).
Bei einer 2x2-Tabelle kann man Cramers V zwar berechnen, man sollte jedoch Phi (φ) als Maßzahl verwenden.

Cramers V berechnet sich folgendermaßen V = $\sqrt{\frac{\chi^2}{n*(R-1)}}$

Mit: n = Gesamtzahl der Fälle
R = der kleinere der beiden Werte: Anzahl Zeilen und Anzahl Spalten

Beispiel:

	Jungen	Mädchen	
Lego	2	2	4
Puppen	1	5	6
Computerspiele	7	3	10
	10	10	20

Um χ^2 zu berechnen muss wieder zuerst die Indifferenztabelle (= theoretische Verteilung) erzeugt werden. Die Felder werden dabei analog zur Berechnung der Felder bei Phi (φ) berechnet.
Beispiel: Feld links oben (Jungen - Lego)

fe11 = $\frac{\sum Zeile1 * \sum Spalte1}{N} = \frac{4*10}{20} = 2$

Es ergibt sich folgende theoretische Verteilung:

	Jungen	Mädchen	
Lego	2	2	4
Puppen	3	3	6
Computerspiele	5	5	10
	10	10	20

Dann kann χ^2 folgendermaßen berechnet werden:

Zeile	Spalte	fb	fe	(fb – fe)	(fb – fe)²	$\frac{(fb - fe)^2}{fe}$
1	1	2	2	0	0	0 / 2 = 0
1	2	2	2	0	0	0 / 2 = 0
2	1	1	3	(-2)	4	4 / 2 = 2
2	2	5	3	2	4	4 / 2 = 2
3	1	7	5	2	4	4 / 2 = 2
3	2	3	5	(-2)	4	4 / 2 = 2
		N = 20	N = 20			
						$\sum = \chi^2$ = 2+2+2+2=8

Mit fb: Übernahme der Daten aus der empirischen Verteilung
fe: Übernahme der Daten aus der theoretischen Verteilung

Cramers V berechnet sich folgendermaßen: V = $\sqrt{\frac{\chi^2}{n*(R-1)}}$

n = Gesamtzahl der Fälle – in unserem Fall: n = 20
R = der kleinere der beiden Werte: Anzahl Zeilen (hier 3) und Anzahl Spalten (hier 2)
→ wähle Anzahl Spalten = 2

Cramers V = $\sqrt{\frac{8}{20*(2-1)}}$ = 0,632

Die **Berechnung von Cramers V mit Hilfe von SPSS** erfolgt analog zur Berechnung von Phi (φ) (siehe Kapitel 5.4.6).

5.4.7.1 Interpretation

Cramers V liegt bei jeder Kreuztabelle – unabhängig von der Anzahl der Zeilen und Spalten – zwischen 0 und 1. Dieses Zusammenhangsmaß kann bei beliebig großen Kreuztabellen angewandt werden.

Cramers V = 0: es besteht **kein** Zusammenhang zwischen X (Geschlecht) und Y (Lieblingsspielzeug)
Cramers V = 1: es besteht ein **perfekter** Zusammenhang zwischen X und Y

Da Cramers V immer positiv ist, kann keine Aussage über die Richtung des Zusammenhangs getroffen werden.

In der Praxis findet man häufig folgende Interpretationen vor:
0,1 - 0,3 schwacher Zusammenhang
0,4 – 0,5 mittlerer Zusammenhang
> 0,5 starker Zusammenhang

Unser berechnetes Cramers V = 0,632 besagt, dass für das Beispiel ein starker, aber kein perfekter Zusammenhang zwischen Geschlecht und Lieblingsspielzeug besteht.

5.5 Zusammenhangsmaß für zwei ordinalskalierte Maße

Ordinalskalenniveau (siehe Kapitel 3.2) erlaubt es rangmäßige Bewertungen anzustellen. Dabei sind die Abstände allerdings noch nicht exakt in mathematischen Zahlen darstellbar. Typische Beispiele für ordinale Skalen sind Schulnoten oder Prestige.
Für ordinalskalierte Daten bieten sich zwei Möglichkeiten an: Man kann den so genannten Rangkorrelationskoeffizienten Spearman`s Rho (rs) nutzen (siehe Kapitel 5.5.1). Dabei wird die Rangplatzdifferenz zwischen einer x und einer y Bewertung betrachtet. Alternativ, aber etwas aufwändiger kann auch Tau-b berechnet werden (siehe Kapitel 5.5.3).

5.5.1 Rangkorrelationskoeffizient Spearman´s rho

Dieses Maß ist ab ordinalem Skalenniveau gültig und betrachtet die Rangplatzdifferenz (di) von zwei verschiedenen Beurteilungen bei zwei ordinalskalierten Merkmalen

Beispiel:
Die Teilnehmerinnen an einem Eiskunstlauf-Wettbewerb werden von zwei Punktrichtern (Punktrichter A und Punktrichter B) bewertet. Nun stellt sich die Frage, ob die Läuferinnen die von Punktrichter A gut bewertet wurden (x-Wert) tendenziell auch von Punktrichter B gut bewertet wurden (y-Wert).

Es werden nun zunächst alle x-Werte und alle y-Werte **in Ränge umgewandelt**. Demzufolge besitzt jede Läuferin einen Rang x und einen Rang y. Die Differenz Rang x – Rang y ergibt dann die Rangdifferenz di, welche später aufaddiert in die Formel eingesetzt wird.

Für die Berechnung von Spearman´s rho mit der mathematischen Formel ist es notwendig, **nicht die ordinalen Ausgangswerte**, sondern die Ränge zu verwenden. Diese werden dann quasi wie echte metrische Zahlen behandelt.

Die Formel für Spearman´s rho lautet: rs $= 1 - \frac{6 * \sum di^2}{N * (N^2 - 1)}$

Ein Beispiel zur Verdeutlichung: (Die folgenden Daten werden in Kapitel 5.5.2 für die Berechnung von Spearman´s rho mit Hilfe von SPSS verwendet)
Aufgelistet finden Sie die Noten von zwei Punktrichtern beim Eiskunstlauf für 4 Läuferinnen.

	Läuferin 1	Läuferin 2	Läuferin 3	Läuferin 4
Note von Punktrichter A	5,2	5,5	5,7	5,3
Note von Punktrichter B	5,4	5,2	5,6	5,5

Zuerst werden aus den Noten von Punktrichter A Ränge gebildet. Diejenige Läuferin, die die beste Note bekommen hat erhält Rang 1, die mit der zweitbesten Note Rang zwei usw. Analog werden anschließend die Ränge für Punktrichter B gebildet.

Spezialfall: Wenn zwei Läuferinnen von einem Punktrichter dieselbe Note erhalten, wird der Durchschnittsrang berechnet (z.B. beide Läuferinnen erhalten die Bestnote 5,6 → zu vergeben wären die Ränge 1 und 2 → beide erhalten dann Rang (1+2)/2 = 1,5).

Wichtig: Die Formel für Spearman´s rho ist nur gültig, wenn weniger als 20% der vergebenen Ränge dem oben beschriebenen Spezialfall entsprechen, d.h. weniger als 20% der vergebenen Ränge sind gleich.

Für das obige Beispiel entsteht folgende Rangtabelle:

	Läuferin 1	Läuferin 2	Läuferin 3	Läuferin 4
Rang von Punktrichter A	4	2	1	3
Rang von Punktrichter B	3	4	1	2

Nun werden die Rangdifferenzen (A-B) berechnet:

	Rang von A	Rang von B	di Rangdifferenz (A-B)	di²
Läuferin 1	4	3	4-3=1	1²=1
Läuferin 2	2	4	2-4=(-2)	(-2)²=4
Läuferin 3	1	1	1-1=0	0²=0
Läuferin 4	3	2	3-2=1	1²=1
				∑di² = 6

Die Summe aus di² beträgt 6. N beträgt 4 (da hier 4 Läuferinnen bewertet wurden). Die Berechnung von rs ergibt folgendes:

$$rs = 1 - \frac{6 * \sum di^2}{N * (N^2 - 1)} = 1 - \frac{6 * 6}{4 * (16 - 1)} = 1 - \frac{36}{60} = 0{,}4$$

5.5.2 Berechnung von Spearman´s rho mit SPSS

Wählen Sie im Menü „Analysieren“ → „Korrelationen“ → Bivariat

Wählen Sie die beiden Variablen aus, für die das Zusammenhangsmaß berechnet werden soll. Markieren Sie unter Korrelationskoeffizienten „Spearman“. Klicken Sie nun auf den [OK]-Button, SPSS zeigt Ihnen die Ergebnisse folgendermaßen an:

Korrelationen

			NOTE_A	NOTE_B
Spearman-Rho	NOTE_A	Korrelationskoeffizient	1,000	,400
		Sig. (2-seitig)	.	,600
		N	4	4
	NOTE_B	Korrelationskoeffizient	,400	1,000
		Sig. (2-seitig)	,600	.
		N	4	4

Anhand der Ergebnisausgabe für Spearmans-Rho besprechen wir die Ergebnisdarstellung von Zusammenhangsmaßen ab Ordinalskalenniveau in SPSS allgemein:
Rein formal erfolgt die Ergebnisausgabe in SPSS in Kreuztabellen:

Zusammenhangsmaß

		Merkmal_A	Merkmal_B
Merkmal A	Korrelationskoeffizient Sig. (2-seitig) N (= Gesamtanzahl Teilnehmer)	1	2
Merkmal B	Korrelationskoeffizient Sig. (2-seitig) N (=Gesamtanzahl Teilnehmer)	3	4

Es gilt: Auf der Diagonalen befinden sich die Zusammenhänge eines Merkmals mit sich selbst. Das bedeutet konkret: In Feld 1 ist der Zusammenhang von Merkmal A mit Merkmal A abgebildet, in Feld 4 der Zusammenhang von Merkmal B mit Merkmal B. Diese Zusammenhänge sind per Definition immer 1 und daher für die Auswertung uninteressant.

Zusammenhangsmaß

		Merkmal A	Merkmal B
Merkmal A	Korrelationskoeffizient Sig. (2-seitig) N (= Gesamtanzahl Teilnehmer)		Zusammenhang von A und B
Merkmal B	Korrelationskoeffizient Sig. (2-seitig) N (=Gesamtanzahl Teilnehmer)	Zusammenhang von B und A	

In Feld 2 befindet sich der Zusammenhang von Merkmal A mit Merkmal B, in Feld 3 der Zusammenhang von Merkmal B mit Merkmal A. Da sich diese beiden per Definition entsprechen, reicht zur Ergebnisanalyse die Betrachtung eines der beiden Felder (2 oder 3) aus. In den beiden rot markierten Feldern stehen also identische Zahlen. Zur Interpretation der Ergebnisse reicht folglich ein Blick auf Feld 3 (alternativ geht natürlich auch Feld 2):

Korrelationen

			NOTE_A	NOTE_B
Spearman-Rho	NOTE_A	Korrelationskoeffizient	[redacted]	
		Sig. (2-seitig)	[redacted]	
		N	[redacted]	
	NOTE_B	Korrelationskoeffizient	,400	[redacted]
		Sig. (2-seitig)	,600	[redacted]
		N	4	[redacted]

Den Wert für Spearman´s Rho finden Sie neben „Korrelationskoeffizient“. Darunter finden Sie Werte für die Signifikanz. Auf dieses Themengebiet gehen wir in diesem Dokument nicht näher ein. Bei Interesse empfehlen wir Ihnen eines der gängigen Statistik-Werke.
Unterhalb der Signifikanz finden Sie die Gesamtanzahl der Datensätze (= Teilnehmer), die in die Analyse eingegangen ist.

Nach dieser Einleitung zum Grundverständnis der Ergebnisausgabe bei SPSS wenden wir uns wieder unserem konkreten Datenbeispiel zu.
Für obigen Datensatz bestätigt sich unser manuell berechneter Wert von 0,4 (siehe Kapitel 5.5.1) für Spearman´s Rho:

Korrelationen

			NOTE_A	NOTE_B
Spearman-Rho	NOTE_A	Korrelationskoeffizient	1,000	,400
		Sig. (2-seitig)	.	,600
		N	4	4
	NOTE_B	Korrelationskoeffizient	,400	1,000
		Sig. (2-seitig)	,600	.
		N	4	4

5.5.2.1 Interpretation

Ein Spearman´s Rho – Wert von 0,4 besagt, dass eine mittelstarke positive Beziehung zwischen der Bewertung durch Punktrichter A und der Bewertung durch Punktrichter B besteht. D.h. eine Läuferin, die von Punktrichter A gut bewertet wurde, wird tendenziell auch von Punktrichter B gut bewertet.
Einschränkung: Unsere Stichprobe mit 4 Läuferinnen ist zu klein, um allgemein gültige Rückschlüsse zu ziehen.

5.5.3 Tau-b

Eine etwas andere Vorgehensweise wird mit der Berechnung von Tau b verfolgt. Die Logik von Tau b beruht darauf, jede einzelne Untersuchungseinheit mit jeder anderen Untersuchungseinheit zu vergleichen. Man könnte sagen, diese Vergleiche laufen paarweise ab, daher ist im Folgenden oft von „Paaren“ die Rede.
Beim paarweisen Vergleich bei Ordinalskalenniveau werden jeweils zwei Objekte beziehungsweise Personen bei zwei Bewertungen *gleichzeitig* betrachtet. Ich kann also Läuferin 1 und Läuferin 2 als erstes Paar bilden. Jetzt haben beide Läuferinnen eine Note von Punktrichter A (x) und eine Note von Punktrichter B bekommen (y)
Es wird nun folgendermaßen vorgegangen:
Man führt die X-Betrachtung durch, d.h. es wird untersucht ob Läuferin 1 besser als Läuferin 2 von Punktrichter A bewertet wurde. Anschließend wird betrachtet ob Läuferin 1 AUCH von Punktrichter B als Läuferin 2 bewertet wurde (sog. Y-Betrachtung).
Es werden also immer **zwei Objekte** (in diesem Fall Läuferinnen) mit zwei Bewertungen (Punktrichter A und Punktrichter B) betrachtet.
Von *Konkordanz* spricht man, wenn Läuferin 1 von *beiden* Punktrichtern besser (oder schlechter) als Läuferin 2 bewertet wurde.
Ein Wertepaar ist *diskordant*, wenn Läuferin 1 *von einem* der Punktrichter *besser* und *von einem schlechter* als Läuferin B Bewertet wurde.
Wenn Läuferin 1 von einem Punktrichter *dieselbe* Note bekommt wie Läuferin 2 spricht man von einem *Tie*. Dabei gilt: Kommt dieselbe Note von Punktrichter A handelt es sich um ein Tie x, kommt dieselbe Note vom Punktrichter B um ein Tie y und bewerten beide Punktrichter beide Läuferinnen gleich spricht man von einem Tie xy.
Tau b betrachtet das Verhältnis zwischen konkordanten und diskordanten Paaren unter Berücksichtigung der Ties.
Zum besseren Verständnis ein paar Beispiele:

Konkordantes Paar:

	Läuferin 1	Läuferin 2
Punktrichter A	5,7	5,3
Punktrichter B	5,5	5,4

Läuferin 1 wird von Punktrichter A (5,7 vs. 5,3) und von Punktrichter B (5,5 vs. 5,4) besser bewertet als Läuferin 2.

Konkordantes Paar:

	Läuferin 1	Läuferin 2
Punktrichter A	5,2	5,4
Punktrichter B	5,1	5,2

Läuferin 1 wird von Punktrichter A (5,2 vs. 5,4) und von Punktrichter B (5,1 vs. 5,2) schlechter bewertet als Läuferin 2.

Diskordantes Paar:

	Läuferin 1	Läuferin 2
Punktrichter A	5,2	5,4
Punktrichter B	5,3	5,2

Läuferin 1 wird von Punktrichter A schlechter als Läuferin 2 bewertet, von Punktrichter B wird sie aber besser als Läuferin 2 bewertet.

Diskordantes Paar:

	Läuferin 1	Läuferin 2
Punktrichter A	5,5	5,4
Punktrichter B	5,1	5,2

Läuferin 1 wird von Punktrichter A besser als Läuferin 2 bewertet, von Punktrichter B wird sie aber schlechter als Läuferin 2 bewertet.

Tie x:

	Läuferin 1	Läuferin 2
Punktrichter A	5,4	5,4
Punktrichter B	5,3	5,2

Die beiden Läuferinnen erhalten von Punktrichter A dieselbe Bewertung. Es kann kein Rang gebildet werden.

Tie y:

	Läuferin 1	Läuferin 2
Punktrichter A	5,5	5,4
Punktrichter B	5,3	5,3

Die beiden Läuferinnen erhalten von Punktrichter B dieselbe Bewertung. Es kann kein Rang gebildet werden.

Tie xy:

	Läuferin 1	Läuferin 2
Punktrichter A	5,4	5,4
Punktrichter B	5,3	5,3

Die beiden Läuferinnen erhalten von Punktrichter A und Punktrichter B dieselbe Bewertung. Es kann bei beiden Bewertungen kein Rang gebildet werden.

Für Tau b gilt:

- Tau b ist definiert als das Verhältnis des Übergewichts konkordanter oder diskordanter Paare zur Gesamtzahl aller möglichen Paare
- Tau b liegt immer zwischen -1 und +1. Ein Zahlenwert Null für Tau b besagt, dass die Anzahl der konkordanten und diskordanten Paare gleich groß ist, ein Zahlenwert +/- 1 sagt aus, dass es entweder nur konkordante oder nur diskordante Paare gibt.
- Tau b kann bei beliebig großen Tabellen angewendet werden, kann aber nur dann einen Wert von +/- 1 annehmen, wenn es sich um eine so genannte quadratische Tabelle (z.B. 3x3-Tabelle) handelt.
- Für 2*2 Tabellen ergibt der Koeffizient Tau b denselben Zahlenwert wie der Koeffizient Phi

Zur Verdeutlichung ein Daten-Beispiel: (Die folgenden Daten werden in Kapitel 5.5.4 für die Berechnung von tau-b mit Hilfe von SPSS verwendet)

	Läuferin 1	Läuferin 2	Läuferin 3	Läuferin 4
Punktrichter A	5,3	5,5	5,3	5,6
Punktrichter B	5,4	5,4	5,5	5,6

Es gibt folgende Paare:

L1 / L2:	Tie y
L1 / L3:	Tie x
L1 / L4:	Konkordant
L2 / L3:	Diskordant
L2 / L4:	Konkordant
L3 / L4	Konkordant

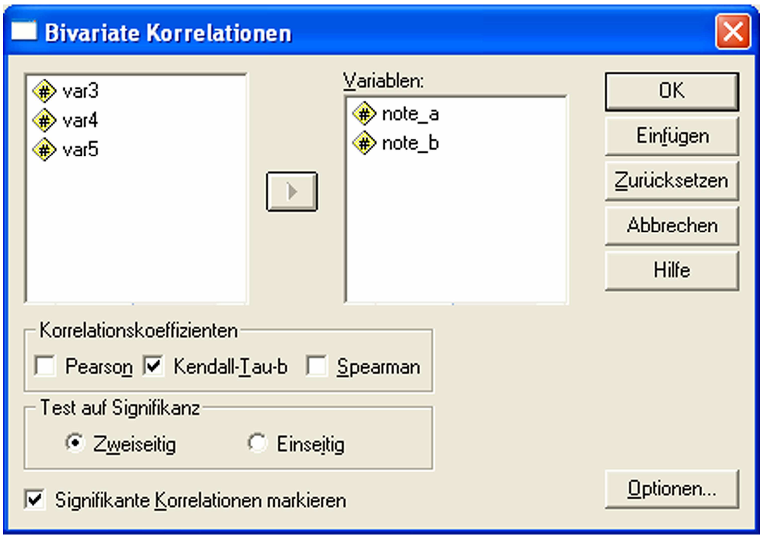
Tau b berechnet sich nun folgendermaßen: $\tau b = \frac{Nc - Nd}{\sqrt{(Nc + Nd + Tx) * (Nc + Nd + Ty)}}$

Mit :
Nc: Anzahl konkordanter Paare
Nd: Anzahl diskordanter Paare
Tx: Ties in x
Ty: Ties in y

Für das Beispiel ergibt sich: $\tau b = \frac{3-1}{\sqrt{(3+1+1)*(3+1+1)}} = \frac{2}{\sqrt{5*5}}$ = 0,4

5.5.4 Berechnung von Tau-b mit Hilfe von SPSS

Wählen Sie im Menü „Analysieren“ → „Korrelation“ → bivariat. Es öffnet sich folgendes Fenster:



Wählen Sie die beiden Variablen aus, für die das Zusammenhangsmaß berechnet werden soll. Wählen Sie unter Korrelationskoeffizienten „Kendall-Tau-b“ aus, klicken Sie dann auf den [OK]-Button.
SPSS bestätigt unsere manuell berechneten Ergebnisse

Korrelationen

			NOTE_A	NOTE_B
Kendall-Tau-b	NOTE_A	Korrelationskoeffizient	1,000	,400
		Sig. (2-seitig)	.	,444
		N	4	4
	NOTE_B	Korrelationskoeffizient	,400	1,000
		Sig. (2-seitig)	,444	.
		N	4	4

5.5.4.1 Interpretation

Es besteht ein mittelstark positiver Zusammenhang zwischen der Bewertung durch Punktrichter A und der Bewertung durch Punktrichter B. Es gibt ein mittelstarkes Übergewicht an Konkordanten Paaren. Das bedeutet, die Läuferin, die von Punktrichter A besser bewertet wird, wird tendenziell auch von Punktrichter B besser bewertet.
Auch hier gilt die Einschränkung, dass die Stichprobe zu klein ist, um allgemein gültige Rückschlüsse zu ziehen.

5.6 Zusammenhangsmaß für zwei intervallskalierte Maße

Der Korrelationskoeffizient r (auch: Produkt-Moment-Korrelation (engl.: Bravais-Pearson'scher Korrelationskoeffizient, oder: Pearson's r) ist das bekannteste statistische Zusammenhangsmaß. Er wird als statistisches Maß für den linearen Zusammenhang zwischen zwei mindestens intervallskalierten (d.h. metrischen) Variablen verwendet. Oftmals spricht man der Einfachheit halber nur von „Korrelation“

Der Korrelationskoeffizient kann dabei Werte zwischen minimal -1 und maximal +1 annehmen, wobei -1 einen perfekten negativen ("je größer X, desto kleiner Y") und +1 einen perfekten positiven ("je größer X, desto größer Y") Zusammenhang bezeichnet
Wenn der Korrelationskoeffizient den Wert 0 aufweist, hängen die beiden Merkmale überhaupt nicht linear zusammen. Allerdings können diese ungeachtet dessen in nicht-linearer Weise (z.B. U-förmig) zusammenhängen.

Es gilt:
Die Korrelation zwischen X und Y entspricht der Korrelation zwischen Y und X
Die Korrelation zwischen X und X ist immer 1
Die Korrelation zwischen Y und Y ist immer 1

Eine Korrelation größer +1 oder kleiner -1 kann niemals auftreten.

5.6.1 Berechnung des Korrelationskoeffizienten

Um den Korrelationskoeffizienten berechnen zu können muss man vorher Mittelwerte und Standardabweichungen von X und von Y, sowie die Kovarianz zwischen X und Y berechnen.

Die Formel für den Korrelationskoeffizient lautet:

$$r_{xy} = \frac{Kov(x,y)}{Std(x) * (Std(y)}$$

Ein Datenbeispiel: (Die folgenden Daten werden in Kapitel 5.6.2 für die Berechnung des Korrelationskoeffizienten mit Hilfe von SPSS verwendet)

i	x_i	y_i
1	-2	1
2	-1	4
3	1	2
4	2	5

- Zuerst werden nun die Mittelwerte von X und Y berechnet:

Berechnung des Mittelwerts von X :
MW (x) = $\frac{[(-2)+(-1)+1+2]}{4}$ = 0

Berechnung des Mittelwerts von y:
MW (y) = $\frac{[1+4+2+5]}{4}$ = 3

- Es folgt die Berechnung der Standardabweichungen von X und Y:

Berechnung der Standardabweichung von X:
Var(x) = $\frac{1}{(n-1)} * \sum [xi - MW(x)]^2$ = $\frac{1}{(4-1)}$ * [((-2) -0)² + ((-1)-0)² + (1-0)² + (2-0)²]
= 1/3 * (10) = 3,3333
Std(x) = $\sqrt{Var(x)}$ = $\sqrt{3{,}333}$ = 1,826

Berechnung der Standardabweichung von Y:
Var(y) = $\frac{1}{(n-1)} * \sum [yi - MW(y)]^2$ = $\frac{1}{(4-1)}$ * [(1-3)² + (4-3)² + (2-3)² + (5-3)²]
= 1/3 * (10) = 3,3333
Std(y) = $\sqrt{Var(y)}$ = $\sqrt{3{,}333}$ = 1,826

- Nun folgt die Berechnung der Kovarianz zwischen X und Y.

Die Kovarianz wird mit folgender Formel berechnet:
s_{xy}= $\frac{1}{(n-1)} * \sum [xi - MW(x)] * [yi - MW(y)]$

Es ergibt sich:

$(x_i - MW(x))*(y_i - MW(y))$
[(-2)-0] * [1-3] = 4
[(-1)-0] * [4-3] = -1
[1-0] * [2-3] = -1
[2-0] * [5-3] = 4

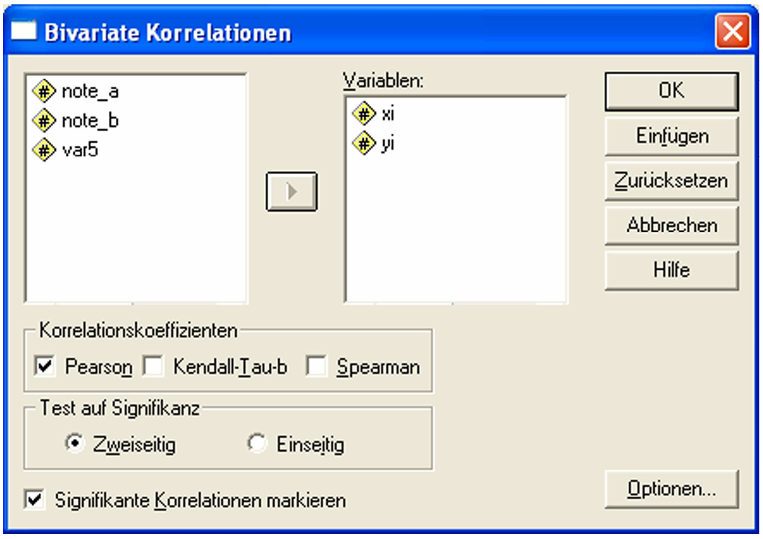
Hier: Kov(x,y) = $\frac{1}{(4-1)}$ *[4+(-1)+(-1)+(4)] / (4-1) = (6/3) = 2

- Berechnung des Korrelationskoeffizienten:

r_{xy} = $\frac{Kov(x,y)}{Std(x)*Std(y)}$ = $\frac{2}{1{,}826*1{,}826}$ = 0,60

5.6.2 Berechnung des Korrelationskoeffizienten mit SPSS

Wählen Sie im Menü „Analysieren“ → „Korrelation“ → „bivariat“



Wählen Sie die beiden Variablen aus, für die der Korrelationskoeffizient berechnet werden soll. Wählen Sie unter Korrelationskoeffizienten „Pearson“ aus.
Wenn Sie auf den [Optionen..]-Button klicken können Sie sich zusätzlich die Mittelwerte und Kovarianzen anzeigen lassen.
Klicken Sie nun auf den [OK]-Button.
SPSS bestätigt unsere manuell berechneten Ergebnisse:

Korrelationen

		XI	YI
XI	Korrelation nach Pearson	1,000	,600
	Signifikanz (2-seitig)	.	,400
	N	4	4
YI	Korrelation nach Pearson	,600	1,000
	Signifikanz (2-seitig)	,400	.
	N	4	4

5.6.3 Interpretation des Korrelationskoeffizienten

Da bei der Interpretation des Korrelationskoeffizienten häufig Fehler gemacht werden, widmen wir uns diesem Themengebiet in aller Ausführlichkeit.

Das oberste Gebot bei der Interpretation des Korrelationskoeffizienten lautet: Es handelt sich lediglich um ein Maß für den Zusammenhang zweier Variablen.

Kausale Aussagen (Ursache-Wirkungs-Aussagen) sind nicht zulässig!

Beispiel zur Verdeutlichung:
Empirische Untersuchungen haben gezeigt, dass ein Zusammenhang besteht zwischen der Anzahl von Feuerwehrautos am Brandort und der Höhe des Brandschadens.
Daraus ließe sich nun folgender (kausaler) Schluss ziehen: je mehr Feuerwehrautos bei einem Brand im Einsatz sind, desto höher der Schaden.
Das ist natürlich Unfug, verdeutlicht aber die Schwierigkeit der Interpretation.

Außerdem ist es möglich, dass die beiden Variablen lediglich über eine andere, dritte Variable zusammenhängen. Man spricht dann von einer so genannten Scheinkorrelation.

Dazu ein weiteres Beispiel:
Eine Analyse über die letzten 50 Jahre hat ergeben, dass die Besiedlung durch Störche im Norden Baden-Württembergs positiv mit der dortigen Geburtenzahl korreliert. Das bedeutet natürlich noch lange keinen kausalen Zusammenhang - weder bringen Störche Kinder noch umgekehrt. Trotzdem ist ein statistischer Zusammenhang gegeben. Dieser leitet sich aber aus einem dritten Faktor ab, wie z.B. der Verstädterung, die sowohl Nistplätze vernichtet als auch Kleinfamilien fördert.

Für die Interpretation des Korrelationskoeffizienten ist also stets Vorsicht geboten.

Bei Zusammenhangsmaßen für sozialwissenschaftliche Daten gelten folgende Faustregeln:

$M = 1$ → perfekter statistischer Zusammenhang
$0{,}7 < M < 0{,}99$ → sehr starker Zusammenhang
$0{,}5 < M < 0{,}69$ → starker Zusammenhang
$0{,}3 < M < 0{,}49$ → mittelstarker Zusammenhang
$0{,}2 < M < 0{,}29$ → schwacher Zusammenhang
$r = 0$ → statistische Unabhängigkeit, d.h. es besteht kein Zusammenhang

Das Quadrat des Korrelationskoeffizienten r^2 nennt man Bestimmtheitsmaß (= Determinationskoeffizient). Es gibt in erster Näherung an, wie viel % der Varianz durch die untersuchte Beziehung erklärt werden. Beispiel: Bei $r = 0{,}3$ bzw. $0{,}8$ werden 9% bzw. 64% der gesamten auftretenden Varianz im Hinblick auf einen statistischen Zusammenhang erklärt.

5.7 Zusammenhangsmaß für 2 Skalen mit unterschiedlichen Skalenniveaus

Für die Untersuchung von Zusammenhängen mit verschiedenen Skalenniveaus gilt, dass jeweils das Maß für die Variable mit dem niedrigeren Skalenniveau einsetzbar ist.
NACHTEIL: Dies führt zu einem Informationsverlust, da Informationen aus der Skala mit dem höheren Skalenniveau (Rangfolge der Merkmalsklassen, Größe der Merkmalswerte) nicht einfließen.

5.7.1 Das Zusammenhangsmaß eta (η)

Eta (η) berücksichtigt die Unterscheidung zwischen abhängiger und unabhängiger Variable. Dieser Koeffizient basiert auf der Berechnung des PRE-Maßes eta² (η^2) und beschreibt den Zusammenhang zwischen einer nominal- oder ordinalskalierten unabhängigen Variablen und einer intervallskalierten abhängigen Variable. Das Konzept eines PRE-Maßes soll hier nicht Gegenstand sein und wird daher nicht näher ausgeführt.
Grundsätzlich wäre Eta (η) auch als Zusammenhangsmaß für zwei intervallskalierte Variablen einsetzbar, hierfür sind allerdings die speziellen Maße (siehe Korrelationskoeffizient Kapitel 5.6) besser geeignet.

Eta² berechnet sich folgendermaßen:
Die nominalskalierte Variable wird als unabhängige Variable (UV), die intervallskalierte Variable als abhängige Variable (AV) aufgefasst.
Beispiel: es wird ein Zusammenhang vermutet zwischen der Tageszeitung, die man liest (unabhängige Variable, nominalskaliert) und dem Bruttoeinkommen pro Monat (abhängige Variable, metrisch skaliert)
Der Einfachheit halber wird nur zwischen den Lesern regionaler Tageszeitungen (RZ) und den Lesern überregionaler Tageszeitungen (ÜZ) unterschieden.
Es liegen folgende Rohdaten vor:

Person	Zeitungsart	Einkommen
x_1	RZ	1500
x_2	RZ	1200
x_3	ÜZ	1600
x_4	RZ	1300
x_5	ÜZ	1700
x_6	ÜZ	1800
x_7	ÜZ	1700
x_8	RZ	1200
x_9	ÜZ	1700
x_{10}	RZ	1300
		$\sum = 15000$

(Diese Daten werden in Kapitel 5.7.2 für die Berechnung von eta mit Hilfe von SPSS verwendet)

Gesamtmittelwert über alle Teilnehmer: MW(x) = $\frac{1}{n} * \sum xi = \frac{1}{10} * 15000 = 1500$

Prognose der Werte der AV, *ohne* die Werte der UV zu berücksichtigen.
Der beste Prognosewert für die Werteverteilung einer metrischen Variable (AV) ist das arithmetische Mittel, da hier per Definition die Summe der Abweichungsquadrate (= Prognosefehler) minimal ist, es ergibt sich
$SAQ_{ges} = \sum (xi - MW(x))^2$

SAQ_{ges} ist ein Maß für den Gesamtfehler, der sich ergibt, wenn die Werte der AV allein durch den Mittelwert der AV vorhergesagt werden.

Person	xi-MW(x)	[xi-MW(x)]²
x_1	1500 - 1500 = 0	0
x_2	1200 - 1500 = -300	90000
x_3	100	10000
x_4	-200	40000
x_5	200	40000
x_6	300	90000
x_7	200	40000
x_8	-300	90000
x_9	200	40000
x_{10}	-200	40000

Es ergibt sich $SAQ_{ges} = \sum [xi - MW(x)]^2 = 480000$

Prognose der Werte der AV *unter Berücksichtigung* der Werte der UV.
Es lesen 5 Personen Regionale Tageszeitungen (RZ) und 5 Personen Überregionale Tageszeitungen (ÜZ). Dabei ergeben sich folgende Mittelwerte:

MW(RZ) = $\frac{1}{5} * [1500 + 1200 + 1300 + 1200 + 1300] = 1300$

MW(ÜZ) = $\frac{1}{5} * [1600 + 1700 + 1800 + 1700 + 1700] = 1700$

Es ergeben sich folgende spezifische SAQ-Werte für die Zeitungsart:

Person	xi-MW(RZ)	[xi-MW(RZ)]²
x_1	1500 - 1300 = 200	40000
x_2	1200 - 1300 = -100	10000
x_4	1300 - 1300 = 0	0
x_8	1200 - 1300 = -100	10000
x_{10}	1300-1300 = 0	0

$SAQ_{RZ} = \sum [xi - MW(RZ)]^2 = 60000$

Person	xi-MW(ÜZ)	[xi-MW(ÜZ)]²
x_3	1600 - 1700 = -100	10000
x_5	1700 - 1700 = 0	0
x_6	1800 - 1700 = 100	10000
x_7	1700 - 1700 = 0	0
x_9	1700-1700 = 0	0

$SAQ_{ÜZ} = \sum [xi - MW(ÜZ)]^2 = 20000$

Die Summe der SAQ pro UV-Ausprägung ist ein Maß für den Gesamtfehler, der sich ergibt, wenn die Werte der AV auf der Basis der Werte der UV prognostiziert werden:
$SAQ_{UV} = SAQ_{RZ} + SAQ_{ÜZ} = 60000 + 20000 = 80000$

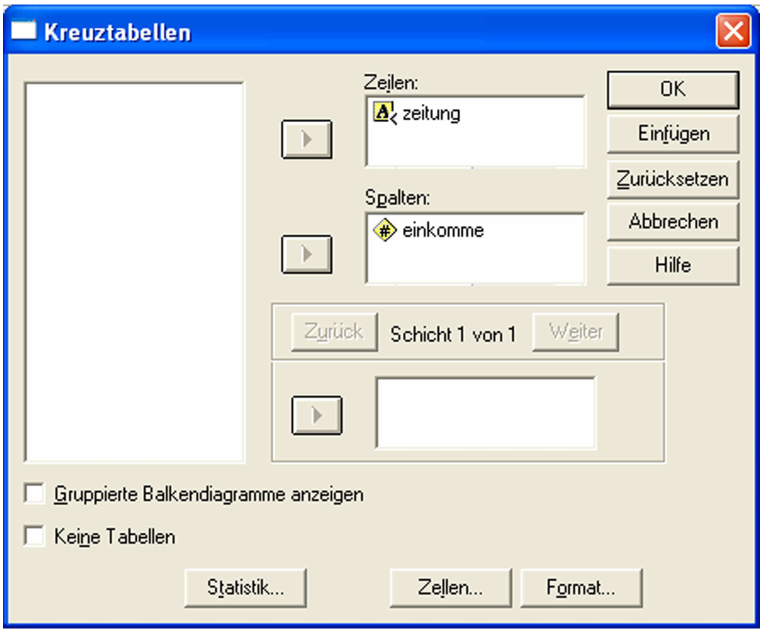
Berechnung von Eta²:
auf der Basis der Prognoseverbesserung von Schritt 2 nach Schritt 3 kann der Zusammenhang zwischen den beiden Variablen bestimmt werden.
Es gilt: $Eta^2 = \eta^2 = \frac{SAQges - SAQuv}{SAQges} = \frac{480000 - 80000}{480000} = 40/48 = 0,833333$

Berechnung von Eta
Um daraus das Zusammenhangsmaß η zu erhalten, muss die Wurzel gezogen werden:

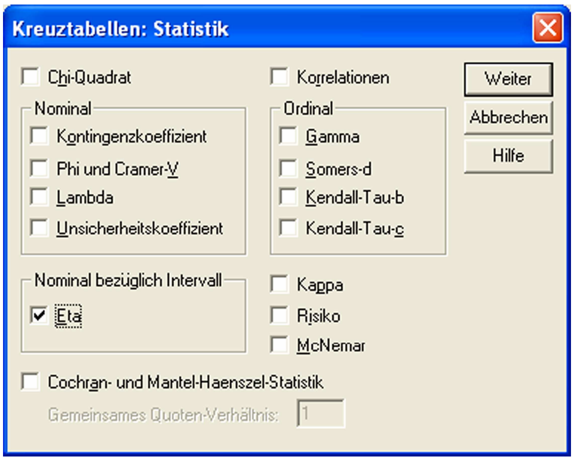
$\eta = \sqrt{\eta^2} = \sqrt{0,83333} = 0,91$

5.7.2 Berechnung von eta mit Hilfe von SPSS

Wandeln Sie Ihre nominale Variable für die SPSS-Berechnung in Zahlenwerte (z.B. RZ = 0, ÜZ = 1) um.
Wählen Sie im Menü „Analysieren“ → „Deskriptive Statistiken“ → „Kreuztabellen.
Es öffnet sich folgendes Fenster:



WICHTIG: Ordnen Sie das nominalskalierte Merkmal (hier: Zeitung) in die Zeilen, das intervallskalierte (hier: Einkommen) in die Spalten ein. Klicken Sie dann auf den [Statistiken]-Button. Es öffnet sich folgendes Fenster:



Wählen Sie unter „Nominal bezüglich Intervall“ die Option „Eta“ aus. Klicken Sie auf den [Weiter]-Button.

Ergebnisse für Eta (= η) werden in SPSS folgendermaßen ausgewiesen:

Richtungsmaße

			Wert
Nominal- bzgl. Intervallmaß	Eta	ZEITUNG abhängig	1,000
		EINKOMME abhängig	,913

SPSS zeigt immer zwei Zusammenhänge an (siehe oben). Die Werte beziehen sich dabei immer auf die nominalskalierte Variable.

Die Ergebnisanzeige ist folgendermaßen zu lesen:
Der Eta-Wert (= η) in der ersten Zeile ist immer 1. Es handelt sich um den Zusammenhang der nominalskalierten Variable (hier: ZEITUNG) mit sich selbst.
Die für die Interpretation wichtige Maßzahl ist der zweite Wert der Ergebnisausgabe. Dieser stellt den Zusammenhang zwischen nominalskalierter (hier: Zeitung) und intervallskalierter Variable (hier: EINKOMMEN) dar.
SPSS bestätigt unseren manuell berechneten Wert von Eta (= η) = 0,91.

5.7.2.1 Interpretation

Der Wertebereich für Eta (= η) liegt zwischen 0 und 1. Ein Wert größer 0,3 kann bereits als recht starker Zusammenhang betrachtet werden.
Der Eta-Koeffizient zeigt allerdings nicht die Richtung des Zusammenhangs an (verdienen RZ- oder ÜZ-Leser monatlich mehr Geld?). Um Aussagen über die Richtung des Zusammenhangs treffen zu können sind weitere statistische Vorgehen notwendig.

Man kann für unser Beispiel also die Schlussfolgerung ziehen, dass es einen sehr starken Zusammenhang gibt zwischen der Art der Zeitung, die man liest und dem eigenen Einkommen.

Ein kausaler Schluss ist jedoch nicht möglich: Man kann keine Aussage darüber treffen, ob Personen mehr verdienen, weil sie eine bestimmte Zeitungsart lesen oder ob sie überregionale Zeitungen lesen, weil sie mehr verdienen.